ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

INHALT – CONTENTS – SOMMAIRE

ARCH. MATH.	VOL. XII	FASC. 2	PAG. 81–160	1. V. 1961

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

ARCHIV DER MATHEMATIK
ARCHIVES OF MATHEMATICS — ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Adresse der Redaktion: Würzburg (Deutschland), Klinikstraße 6

Das *Archiv der Mathematik* erscheint regelmäßig alle 2 Monate mit jährlich 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt für den ganzen Band Fr. 66.— (DM 66.—) und für das Einzelheft Fr. 14.— (DM 14.—). Mitglieder einer der nachstehend genannten Gesellschaften erhalten hierauf 20% Rabatt: *Canadian Mathematical Congress · Deutsche Mathematiker-Vereinigung · Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik · Het Wiskundig Genootshap te Amsterdam · Indian Mathematical Society · Matematisk Forening i Kobenhavn · Norsk Matematisk Forening · Österreichische Mathematische Gesellschaft · Polskie Towarystwo Matematyczne · Schweizerische Mathematische Gesellschaft · Sociedad Matemática Española · Société Mathématique de France · The American Mathematical Society · The Edinburgh Mathematical Society · The London Mathematical Society · The Mathematical Association of America · Unión Matematica Argentina · Unione Matematica Italiana.*

Veröffentlicht werden in erster Linie *Originalarbeiten* aus dem Gesamtgebiet der *Mathematik* und ihrer unmittelbaren Anwendungen. In beschränktem Maße können auch *Selbstreferate* über bislang unveröffentlichte größere Arbeiten, deren wissenschaftliche Bedeutung dies gerechtfertigt erscheinen läßt, Aufnahme finden. In diesen Selbstreferaten müssen außer den Resultaten die wesentlichen Schritte der Beweisführung mitgeteilt werden. Schließlich gelangen in zwangloser Folge *Zusammenfassende Berichte* über die Fortschritte einzelner Sondergebiete, die in rascher Entwicklung begriffen sind, mit ausführlichen Literaturangaben zum Abdruck.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache abgefaßt sein und sollen an Umfang 10 Druckseiten nicht überschreiten. Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln einzureichen und ihnen separat eine «Anweisung für den Setzer» beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz, Kleindruck und griechische, Fraktur-, Antiqua- und sonstige Typen durch farbige Unterstreichungen kenntlich gemacht sind. Die Vorlagen für Abbildungen müssen reproduktionsfertig und mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden. Beschriftung der Abbildung jedoch nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier. Nicht durch die Druckerei verschuldete Autorkorrekturen, welche 10% der reinen Satzkosten übersteigen, werden den betreffenden Autoren belastet.

Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht. Den Verfassern werden 75 Separata ohne Umschlag gratis überlassen; weitere Fortdrucke bzw. Umschläge für Separata, sofern ihre Bestellung bei Rückgabe der Korrektur aufgegeben wird, können gegen folgende Berechnung geliefert werden: Je 25 Fortdrucke DM 0,80 pro Seite (ohne Umschlag); erste 25 Umschläge DM 18.—, je weitere 25 Umschläge DM 6.—.

Redaktionsschluß spätestens 3 Monate vor Erscheinungstermin des jeweiligen Heftes. Sämtliche *Zuschriften* sind an die obengenannte Adresse der Redaktion erbeten.

Inserate: 1/1 Seite Fr. (DM) 175.—, 1/2 Seite Fr. (DM) 90.—, 1/4 Seite Fr. (DM) 50.—.

Gesamtherstellung: Konrad Triltsch, Graphischer Großbetrieb, Würzburg

---

Die Auslieferung dieser Zeitschrift erfolgt für Deutschland durch den Birkhäuser Verlag, Stuttgart Olgastraße 53 und für alle übrigen Staaten durch den Birkhäuser Verlag in Basel.

Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nicht-trivialer Fittingscher Untergruppe

Von

Reinhold Baer

Eine Partition der endlichen Gruppe $G \neq 1$ ist eine Menge σ von 1 verschiedener Untergruppen von G derart, daß jedes von 1 verschiedene Element aus G in einer und nur einer Untergruppe aus σ liegt. Besteht σ nur aus G, so heißt σ trivial; und wenn σ mit X auch alle zu X konjugierten Untergruppen enthält, so heiße σ normal.

Weiter nennen wir eine Untergruppe U von G eine σ-zulässige Untergruppe von G, wenn jede nicht in U enthaltene Untergruppe X aus σ der Bedingung $X \cap U = 1$ genügt. Gibt es einen eigentlichen σ-zulässigen Normalteiler von G, so nennen wir σ nicht-einfach, sonst einfach.

Wir haben in einer vorangehenden Untersuchung einen Überblick über die nicht-einfachen, normalen Partitionen gegeben. Wir wollen im folgenden zeigen, daß aus der Existenz einer normalen, einfachen, nicht-trivialen Partition der Gruppe G folgt, daß entweder der Sockel von G einfach und nicht-abelsch ist oder aber G die symmetrische Gruppe des Grades 4 ist und die Partition aus den nicht im Sockel enthaltenen zyklischen Untergruppen besteht.

Von den Resultaten unserer vorangehenden Untersuchung der Partitionen endlicher Gruppen werden wir weitgehenden Gebrauch machen; und werden auf die dortigen Ergebnisse kurz mit Lemma 2.5 oder Satz 5.1, (c) etc. hinweisen.

Bezeichnungen

$o(g)$ = Ordnung des Gruppenelements g.

$o(G)$ = Ordnung der Gruppe G.

p-Element [p-Gruppe] = Element [Gruppe] mit p-Potenzordnung,

p'-Gruppe = Gruppe mit zu p teilerfremder Ordnung.

$\mathfrak{Z}G$ = Zentrum der Gruppe G.

$\mathfrak{F}G$ = Fittingsche Untergruppe von G = Produkt aller nilpotenten Normalteiler von G = umfassendster nilpotenter Normalteiler von G.

$\mathfrak{S}G$ = Sockel der Gruppe G = Produkt aller minimalen Normalteiler von G.

$\mathfrak{N}U$ = Normalisator der Untergruppe U von G in G.

$\mathfrak{C}U$ = Zentralisator der Untergruppe U von G in G.

$a^b = b^{-1}ab = a(a \circ b)$.

$x \circ Y$ = Menge der Elemente $x \circ y$ mit y in Y.

Normalisatorgleich sind $U = \mathfrak{N}U$ erfüllende Untergruppen.

Komplementär sind $G = AB = BA$, $1 = A \cap B$ erfüllende Untergruppen A, B von G.

$A \subset B$ bedeutet, daß A eine von B verschiedene Untergruppe von B ist.

Frobeniusautomorphismen sind Automorphismen von Primzahlordnung ohne von 1 verschiedene Fixelemente.

Frobeniusgruppen von Automorphismen sind Automorphismengruppen, deren von 1 verschiedene Automorphismen keine von 1 verschiedenen Fixelemente haben.

Alle betrachteten Gruppen sind endlich.

Das Ziel unserer Untersuchung ist der Beweis der folgenden beiden Resultate:

Satz A. *Ist σ eine normale, nicht-triviale Partition der Gruppe G und $\mathfrak{F}G \neq 1$, so ist σ dann und nur dann einfach, wenn*

(a) *G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist und*

(b) *also $\mathfrak{S}G$ elementar-abelsch der Ordnung 4 ist und*

(c) *σ genau aus den nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen von G besteht.*

Satz B. *Die normale, nicht-triviale Partition σ von G ist dann und nur dann nicht einfach, wenn G einen von 1 verschiedenen Hallschen nilpotenten Normalteiler besitzt.*

Wir beginnen mit dem Beweis der Notwendigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) des Satzes A. Dieser wird in einer Reihe von Schritten geführt, die wir als Hilfssätze (1) bis (18) formulieren werden. Dabei werden wir stillschweigend die folgenden Voraussetzungen machen:

σ ist eine normale, einfache, nicht-triviale Partition von G und $\mathfrak{F}G \neq 1$.

Dann ist auch $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G \neq 1$. Ist p irgendein Primteiler von $o(\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G) \neq 1$, so ist die Menge P der $x^p = 1$ erfüllenden Elemente x aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G$ eine von 1 verschiedene, elementar-abelsche, charakteristische p-Untergruppe von G. Wir können also im folgenden stillschweigend die Annahme machen:

Es gibt einen elementar-abelschen p-Normalteiler $P \neq 1$ von G.

(1) $$\mathfrak{Z}G = 1.$$

Beweis. Wäre $z \neq 1$ ein Zentrumselement von G, so wäre die z enthaltende Komponente T von σ wegen Lemma 2.5 ein Normalteiler von G. Da σ nicht trivial ist, so wäre $G \neq T$, so daß σ nicht einfach wäre.

(1*) *G ist nicht nilpotent.*

Dies folgt sofort aus (1).

(2) *P ist in keiner Komponente von σ enthalten.*

Beweis. Wäre P in der Komponente T von σ enthalten, so wäre $T \neq G$, da σ nicht-trivial ist; und T wäre wegen Lemma 2.5 ein Normalteiler von G, so daß σ nicht einfach wäre.

(3) $$(\mathfrak{C}P)^p = 1.$$

Beweis. Wäre c ein $c^p \neq 1$ erfüllendes Element aus $\mathfrak{C}P$, so würde die c enthaltende Komponente von σ wegen Lemma 2.1 ganz P enthalten, da ja $P^p = 1$ ist. Wegen (2) ist aber P in keiner Komponente von σ enthalten.

(4) *Ist X eine Komponente von σ mit $X \cap P \neq 1$, so ist X ein Normalteiler der p-Gruppe XP; und die nicht in X enthaltenen Elemente aus XP haben sämtlich die Ordnung p.*

Beweis. Aus $X \cap P \neq 1$ und Lemma 2.5 folgt wegen der Kommutativität von P sofort $P \subseteqq \mathfrak{N}X$, so daß X ein Normalteiler von $U = PX$ ist. Aus (2) ergibt sich $P \nsubseteq X$, so daß X ein echter Normalteiler von U ist. Also ist $\sigma \cap U$ eine normale, nicht-einfache Partition von U. Wäre $\sigma \cap U$ eine Frobeniuspartition von U, so würde aus Satz 4.1, (4) und $X \neq U$ sofort $X \subseteqq \mathfrak{F}U$ folgen. Nun ist aber P selbstverständlich in $\mathfrak{F}U$ enthalten, woraus das Satz 4.1, (1) widersprechende $U = \mathfrak{F}U$ folgen würde. Also ist $\sigma \cap U$ keine Frobeniuspartition von U. Bedenken wir, daß P nicht in X enthalten ist und die nicht in X enthaltenen Elemente aus P sämtlich die Ordnung p haben, so folgt aus Satz 5.1, (b), daß alle nicht in X enthaltenen Elemente aus U die Ordnung p haben; und Satz 5.1, (c) ergibt nun, daß $U/\mathfrak{F}U$ eine p-Gruppe ist. Da U/X bereits als p-Gruppe erkannt ist, so bilden die Elemente aus U mit zu p teilerfremder Ordnung eine in X enthaltene charakteristische Untergruppe V von U [und $\mathfrak{F}U$] mit zu p teilerfremder Ordnung und p-Faktorgruppe U/V. Da P und V Normalteiler teilerfremder Ordnung von U sind, so ist

$$P \circ V \subseteqq P \cap V = 1 .$$

Also ist $V \subseteqq \mathfrak{C}P$ und es folgt aus (3), daß $V^p = 1$ ist. Aus $(o(V), p) = 1$ folgt nun $V = 1$, so daß $U = PX$ eine p-Gruppe ist.

(5) *Ist X eine Komponente von σ mit $X \cap P = 1$ und p ein Teiler von $o(X)$, so ist $X^p = 1$.*

Beweis. Ist S eine p-Sylowuntergruppe von X, so ist $S \neq 1$; und es ist PS eine p-Sylowuntergruppe von PX. Da P ein von 1 verschiedener Normalteiler der p-Gruppe PS ist, so ist $P \cap \mathfrak{Z}(PS) \neq 1$. Sei $t \neq 1$ ein Element aus $P \cap \mathfrak{Z}(PS)$. Dann folgt aus $1 \neq S = S^t \subseteqq X$ und Lemma 2.5 die Zugehörigkeit von t zu $\mathfrak{N}X$. Da P ein Normalteiler von G ist, so wird $t \circ X \subseteqq P \cap X = 1$. Also liegt t in $P \cap \mathfrak{C}X$. Wäre $X^p \neq 1$, so würde aus Lemma 2.1 die Zugehörigkeit von t zu X folgen, die wegen $t \neq 1 = P \cap X$ unmöglich ist. Also ist $X^p = 1$.

(6) *Komponenten von σ sind entweder p-Gruppen oder p'-Gruppen.*

Dies folgt sofort durch Kombination von (4) und (5).

(7) *Es gibt Elemente der Ordnung p^2 in G.*

Beweis. Wäre dies falsch, so wäre $x^p = 1$ für jedes p-Element x aus G. Sei σ^* die Menge aller Untergruppen von G, die entweder zyklisch von der Ordnung p oder Komponenten mit zu p teilerfremder Ordnung von σ sind. Aus (6) folgt, daß σ^* eine normale, nicht-triviale Partition von G ist; und aus $P^p = 1$ folgt die σ^*-Zulässigkeit des wegen (1*) und (2) eigentlichen Normalteilers P von G. Da G wegen (1*) keine Primärgruppe ist, so folgt aus Satz 5.1, (c):

Entweder ist σ^* eine Frobeniuspartition von G oder P ist eine Komponente von σ^* mit Primzahlindex $[G : P]$.

Wäre P eine Komponente von σ^*, so wäre wegen $P^p = 1$ sogar $o(P) = p$ und P würde als zyklische Gruppe im Widerspruch zu (2) in einer Komponente von σ enthalten sein. Also ist P keine Komponente von σ^* und σ^* ist folglich eine Frobeniuspartition von G. Natürlich ist $P \subseteqq \mathfrak{F}G$. Wäre die nilpotente Gruppe $\mathfrak{F}G$ keine p-Gruppe, so wäre auch $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}G \subseteqq \mathfrak{C}P$ keine p-Gruppe, was (3) widerspricht. Also ist $\mathfrak{F}G$ eine p-Gruppe. Da aber $\mathfrak{F}G$ wegen Satz 4.1 eine Hallsche Untergruppe von G ist, so wäre $\mathfrak{F}G$ sogar die Menge aller p-Elemente aus G. Dann folgt aber aus (6) die σ-Zulässigkeit des wegen (1*) eigentlichen Normalteilers $\mathfrak{F}G$ von G, was der Einfachheit von σ widerspricht. Aus diesem Widerspruch folgt die Existenz von Elementen der Ordnung p^2 in G.

(8) *Ist X eine Komponente von σ und p ein Teiler von $o(X)$, so ist $X^p \subseteqq P$ und also $X^{p^2} = 1$.*

Beweis. Aus (6) folgt, daß X eine p-Gruppe ist; und wegen (5) würde aus $X \cap P = 1$ sogar $X^p = 1$ folgen. Wäre also X^p nicht in P enthalten, so wäre $X \cap P \neq 1$; und aus (4) würde folgen, daß die nicht in X enthaltenen Elemente aus PX sämtlich die Ordnung p haben. Es gäbe also ein Element t in X, dessen p-te Potenz t^p nicht in P liegt. Wegen (2) gibt es ein Element w in P, das nicht in X liegt. Also liegt auch das Element wt aus PX nicht in X. Folglich ist

$$1 = (wt)^p \equiv t^p \not\equiv 1 \text{ modulo } P$$

ein Widerspruch. Es folgt $X^p \subseteqq P$; und aus $P^p = 1$ folgt $X^{p^2} = 1$.

(9) *Enthält die Komponente X von σ ein Element t der Ordnung p^2, so ist*

$$o(P) = o(X \cap P)^2 \text{ und } P \circ t = P \cap X = P \cap \mathfrak{C}t.$$

Beweis. Aus (6) folgt, daß X eine p-Gruppe ist; und aus (5) folgern wir $X \cap P \neq 1$. Wegen (4) ist dann X ein Normalteiler der p-Gruppe XP; und die nicht in X enthaltenen Elemente aus XP haben sämtlich die Ordnung p. Wegen (2) ist P nicht in X enthalten. Da das Element t der Ordnung p^2 nicht in P liegen kann, so sind P und X eigentliche Normalteiler von PX. Es folgt $P \circ X \subseteqq P \cap X$.

Sind u, v Elemente aus P, so liegen die Elemente u, v, $u \circ t$ und $v \circ t$ in der abelschen Gruppe P. Es folgt

$$uv \circ t = (u \circ t)^v (v \circ t) = (u \circ t)(v \circ t);$$

vgl. etwa M. HALL [p. 150, (10.2.1.2)]. Die Abbildung $x \to x \circ t$ ist also ein Homomorphismus α von P in $P \cap X$.

Ist x ein Element aus dem Kern A des Homomorphismus α, so ist $xt = tx$. Wäre x nicht in X enthalten, so wäre auch xt nicht in X enthalten und also, wie früher bemerkt, $o(xt) = p$. Daraus würde aber wegen $o(t) = p^2$ das unmögliche $1 = (xt)^p = t^p$ folgen; und damit haben wir $A \subseteqq P \cap X$ gezeigt. Wir haben schon auf

$$P \circ t \subseteqq P \cap X$$

hingewiesen. Folglich wird

$$o(P) = o(P^\alpha)\, o(A) \leqq o(P \cap X)^2.$$

Da σ einfach ist, so ist X kein Normalteiler von G. Aus $P \cap X \neq 1$ und Lemma 2.5 folgt, daß auch $P \cap X$ kein Normalteiler von G sein kann. Es gibt also ein

$$P \cap X \neq (P \cap X)^g = P \cap X^g$$

erfüllendes Element g in G. Da mit X auch X^g eine Komponente der normalen Partition σ ist, so ist $(P \cap X) \cap (P \cap X^g) = 1$. Da aber

$$o(P \cap X) = o([P \cap X]^g) = o(P \cap X^g)$$

ist, so wird $o(P \cap X)^2 \leqq o(P)$; und damit haben wir

$$o(P) = o(P \cap X)^2 = o(P^\alpha)\, o(A)$$

bewiesen. Da P^α und A beide in $P \cap X$ enthalten sind, so wird sogar

$$o(P^\alpha) = o(A) = o(P \cap X);$$

und hieraus folgt

$$P \circ t = P^\alpha = P \cap X = A = P \cap \mathfrak{Ct}.$$

(10) *Ist p eine ungerade Primzahl und A eine elementar-abelsche p-Gruppe, ist α ein Endomorphismus von A mit* $(\alpha - 1)^2 = 0$, *so ist* $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^i = 0$ [*und also* $\alpha^p = 1$].

Beweis. Ist zunächst J der Integritätsbereich der Polynome in einer Unbestimmten u mit Koeffizienten aus dem Primkörper der Charakteristik p, so gilt:

$$(u - 1)^p = u^p - 1 = (u - 1) \sum_{i=0}^{p-1} u^i .$$

Da aber $u - 1$ kein Nullteiler aus J ist, so wird sogar

$$(u - 1)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} u^i .$$

Der Endomorphismenring der Gruppe A hat natürlich die Charakteristik p, so daß der von 1 und α aufgespannte Ring Θ von Endomorphismen ein kommutativer Ring der Charakteristik p ist. Folglich gibt es einen u auf α abbildenden Epimorphismus von J auf Θ; und hieraus folgt insbesondere

$$(\alpha - 1)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^i .$$

Aus $2 \leqq p - 1$ und $(\alpha - 1)^2 = 0$ folgt unsere Behauptung.

[Beweis und Resultate sind offenbar vielfältiger Verallgemeinerung fähig.]

(11) $$p = 2 .$$

Beweis. Aus (7) folgt die Existenz eines Elements w der Ordnung p^2 in G. Sei W die eindeutig bestimmte, w enthaltende Komponente von σ. Sei ω der von w in P induzierte Automorphismus von P. Aus (9) folgt $o(P) = o(P \cap W)^2$ und

$$P^{\omega - 1} = P \cap W = \text{Kern von } \omega - 1 .$$

Insbesondere ist also $(\omega - 1)^2 = 0$.

Aus $P \cap W \neq 1$ folgt wegen (4), daß W ein Normalteiler der p-Gruppe PW ist, und daß die nicht in W enthaltenen Elemente aus PW sämtlich die Ordnung p haben. Wegen (2) ist P nicht in W enthalten und es gibt also ein nicht in W enthaltenes Element v in P. Dann ist auch wv nicht in W enthalten, so daß $o(wv) = p$ ist. Bedenken wir, daß mit v auch alle zu v konjugierten Elemente in der abelschen Gruppe P liegen, und daß ω der von w in P induzierte Automorphismus ist, so wird

$$1 = (wv)^p = w^p (w^{1-p} v w^{p-1}) \cdots v = w^p v^{\omega^{p-1} + \cdots + \omega^i + \cdots + 1}.$$

Aus $w^p \neq 1$ folgt also $\sum_{i=0}^{p-1} \omega^i \neq 0$. Wegen $(\omega - 1)^2 = 0$ folgt nun aus (10) das gewünschte $p = 2$.

(12) $$o(P) = 4.$$

Beweis. Aus (7) folgt [wegen (11)] die Existenz eines Elements w der Ordnung 4, das in einer eindeutig bestimmten Komponente W von σ enthalten ist. Aus (9) folgern wir

$$o(P) = o(P \cap W)^2, \quad P \circ w = P \cap W = P \cap \mathfrak{C}w;$$

und aus (4) ergibt sich, daß W ein Normalteiler der 2-Gruppe PW ist, und daß die nicht in W enthaltenen Elemente aus PW sämtlich die Ordnung 2 haben. Schließlich folgt aus (8) die Zugehörigkeit von w^2 zu P.

Ist x irgendein nicht in W enthaltenes Element aus P, so ist xw ein nicht in W enthaltenes Element aus PW. Also ist $o(x) = 2 = o(xw)$. Bedenken wir noch die Kommutativität von P, so wird

$$x \circ w = xw^{-1}xw = w^2xwxw = w^2$$

wegen $o(w) = 4$. Ist aber x ein Element aus $P \cap W$, so wird $x \circ w = 1$. Damit haben wir gezeigt, daß

$$P \cap W = P \circ w = \{w^2\}$$

und also

$$o(P) = o(P \cap W)^2 = o(\{w^2\})^2 = 4$$

ist.

(13) $$\mathfrak{C}P = P.$$

Beweis. Es folgt aus (3) und (11), daß $(\mathfrak{C}P)^2 = 1$ ist. Also ist der von 1 verschiedene Normalteiler $\mathfrak{C}P$ von G eine elementar-abelsche 2-Gruppe. Nun läßt sich das Resultat (12) auch auf $\mathfrak{C}P$ anwenden, da es ja besagt: aus der Existenz einer normalen, einfachen, nicht-trivialen Partition von G folgt, daß ein von 1 verschiedener, elementar-abelscher 2-Normalteiler von G notwendig die Ordnung 4 hat. Also ist $o(\mathfrak{C}P) = 4$; und aus $P \subseteq \mathfrak{C}P$ folgt $P = \mathfrak{C}P$.

(14) $$[G : P] = 6.$$

Beweis. Wegen (13) ist G/P im wesentlichen mit einer Gruppe von Automorphismen von P identisch. Da P wegen (12) die elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 4 ist, deren Automorphismengruppe die Ordnung 6 hat, so ist $[G : P]$ ein Teiler von 6. Da G wegen (1*) keine 2-Gruppe und $o(P) = 4$ ist, so ist $[G : P]$ durch 3 teilbar.

Wegen (7) [und (11)] gibt es Elemente der Ordnung 4 in G, die nicht in P liegen können. Also ist $[G:P]$ auch durch 2 teilbar; und damit haben wir $[G:P] = 6$ dargetan.

(15) *Ist X eine Untergruppe der Ordnung* 3 *von G, so ist X eine Komponente von σ und* $G = P \cdot \mathfrak{N}X$, $1 = P \cap \mathfrak{N}X$.

Beweis. Als von 1 verschiedene zyklische Untergruppe ist X in einer und nur einer Komponente X^* von σ enthalten. Aus $o(X) = 3$ und (6) folgt wegen (11), daß $o(X^*)$ ungerade ist. Da aber 3 der größte ungerade Teiler von

$$o(G) = o(P)\,[G:P] = 24$$

wegen (12) und (14) ist, so wird $o(X^*) = 3$ und also $X = X^*$ eine Komponente von σ.

Wäre $X = \mathfrak{N}X$, so wäre σ eine Frobeniuspartition und eine solche ist wegen Satz 4.1, (1) nicht einfach. Also ist $X \neq \mathfrak{N}X$. Wäre $P \cap \mathfrak{N}X \neq 1$, so erschließen wir zunächst aus der Tatsache, daß P ein Normalteiler von G und

$$(P \cap \mathfrak{N}X) \circ X \subseteq P \cap X = 1$$

ist, daß sogar $P \cap \mathfrak{C}X = P \cap \mathfrak{N}X \neq 1$ ist. Dann ist aber ein Element der Ordnung 3 aus X mit einem Element der Ordnung 2 aus $P \cap \mathfrak{C}X$ vertauschbar, so daß es ein Element der Ordnung 6 in G geben würde. Ein solches Element wäre aber in einer Komponente von σ enthalten, deren Ordnung weder ungerade noch eine Potenz von 2 wäre; und dies ist wegen (6) und (11) unmöglich. Also ist $P \cap \mathfrak{N}X = 1$.

Damit haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{N}X$ im wesentlichen mit einer Untergruppe von G/P identisch ist. Folglich ist $o(\mathfrak{N}X)$ ein Teiler von $[G:P] = 6$ [wegen (14)]. Da aber $o(\mathfrak{N}X)$ ein echtes Vielfaches von $o(X) = 3$ ist, so wird $o(\mathfrak{N}X) = 6$, so daß $G = P \cdot \mathfrak{N}X$ sein muß.

(16) *G ist das Holomorph von P, so daß G der symmetrischen Gruppe des Grades* 4 *isomorph ist.*

Beweis. Aus (14) folgt, daß G eine zyklische Untergruppe X der Ordnung 3 enthält; und aus (15) ergibt sich, daß $\mathfrak{N}X$ ein Komplement von P in G ist. Wegen (13) ist dann $\mathfrak{N}X$ im wesentlichen mit der Gruppe aller Automorphismen von P identisch, deren Ordnung ja $6 = [G:P] = o(\mathfrak{N}X)$ ist. Also ist G das Holomorph von P. Da aber P wegen (14) elementar-abelsch der Ordnung 4 ist, so ist bekanntlich G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph.

(17) $$P = \mathfrak{S}G.$$

Dies folgt sofort aus (16) [und (12)].

(18) *σ besteht genau aus den zyklischen Untergruppen der Ordnungen* 4 *und* 3 *sowie aus den nicht in P enthaltenen zyklischen Untergruppen der Ordnung* 2; *kurz: σ besteht aus den nicht in P enthaltenen zyklischen Untergruppen von G.*

Beweis. Daß die zyklischen Untergruppen der Ordnung 3 Komponenten von σ sind, ist in (15) enthalten. Ist X eine zyklische Untergruppe der Ordnung 4 von G, so liegt X in einer eindeutig bestimmten Komponente X^* von σ. Wegen (6) und (11) ist

$o(X^*)$ eine Potenz von 2. Nun ist $o(X^*)$ ein Vielfaches von 4. Wäre $o(X^*) = 8$, so wäre X^* wegen $o(G) = 24$ [wegen (16)] eine 2-Sylowuntergruppe von G, die natürlich P enthalten müßte. P ist aber wegen (2) in keiner Komponente von σ enthalten. Folglich ist $X = X^*$ eine Komponente von σ.

Jedes Element aus P liegt in einer zyklischen Untergruppe der Ordnung 4 von G; und jede Untergruppe der Ordnung 4 von G hat einen nicht-trivialen Durchschnitt mit P [wegen (16), (17)]. Da die Elemente aus G die Ordnung 1, 2, 3 und 4 [wegen (16)] haben, so ist damit (18) bewiesen.

Aus (12), (16), (17), (18) folgt die Notwendigkeit der im Satz A angegebenen Bedingungen (a), (b), (c).

Dem Beweis des Hinreichens dieser Bedingungen schicken wir den Beweis von Satz B voraus.

Beweis *von Satz* B. Sei zunächst σ nicht einfach. Dann ist unsere Bedingung sicherlich dann erfüllt, wenn σ eine Frobeniuspartition [Satz 4.1, (1)] oder wenn G primär ist. Ist aber G nicht primär und σ keine Frobeniuspartition, so folgt aus der Nicht-Trivialität von σ, daß G nicht nilpotent ist [Bemerkung 2.4]; und es folgt aus Satz 5.1, (c), daß $G/\mathfrak{Z}G$ eine von 1 verschiedene p-Gruppe und also $\mathfrak{Z}G$ keine p-Gruppe ist. Die Menge K der Elemente aus G mit zu p teilerfremder Ordnung ist dann eine von 1 verschiedene, in $\mathfrak{Z}G$ enthaltene, charakteristische Hallsche Untergruppe von G. Damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingung dargetan.

Existiert umgekehrt ein nilpotenter, Hallscher Normalteiler $H \neq 1$ von G, ist aber trotzdem σ einfach, so ist gewiß $\mathfrak{Z}G \neq 1$ und es würde aus dem bereits bewiesenen Teil des Satzes A [der Notwendigkeit der Bedingungen (a), (b), (c)] folgen, daß G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist. Diese besitzt aber keinen von 1 verschiedenen, nilpotenten, Hallschen Normalteiler; und aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß die Einfachheit von σ eine Folge der Existenz eines von 1 verschiedenen, nilpotenten, Hallschen Normalteilers von G ist. Damit ist Satz B vollständig bewiesen.

Beweis *des Hinreichens der Bedingungen* (a), (b), (c) *des Satzes* A. Ist G die symmetrische Gruppe des Grades 4, so ist $P = \mathfrak{S}G$ eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 4; und man sieht sofort, daß die nicht in P enthaltenen zyklischen Untergruppen von G eine normale, nicht triviale Partition σ von G bilden. Da G aber keinen von 1 verschiedenen, Hallschen, nilpotenten Normalteiler besitzt, so folgt aus Satz B, daß σ einfach ist.

Bemerkung. Ist σ eine normale, einfache, nicht-triviale Partition der Gruppe G, so folgt aus Folgerung 3.6, daß der Sockel $\mathfrak{S}G$ von G entweder abelsch oder einfach ist. Wäre $\mathfrak{S}G$ abelsch, aber nicht primär, so würde $\mathfrak{S}G$ wegen Folgerung 2.3 ganz in einer Komponente von σ liegen, die wegen Lemma 2.5 ein Normalteiler von G wäre im Widerspruch zur Einfachheit und Nicht-Trivialität von σ. Also folgt aus der Nicht-Einfachheit von $\mathfrak{S}G$, daß $\mathfrak{S}G$ eine elementar-abelsche p-Gruppe ist; und hieraus folgt wegen Satz A, daß $\mathfrak{S}G$ elementar-abelsch der Ordnung 4, G die symmetrische Gruppe des Grades 4 und σ die Gesamtheit der nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen von G ist. Damit haben wir gezeigt:

Ist σ eine normale, einfache und nicht-triviale Partition der Gruppe G, so ist entweder $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch oder G ist isomorph der symmetrischen Gruppe des Grades 4 *und σ die Gesamtheit der nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen von G.*

Ist G die symmetrische Gruppe des Grades 5, so ist $\mathfrak{S}G$ die alternierende Gruppe des Grades 5, also einfach und nicht-abelsch; und es ist $[G : \mathfrak{S}G] = 2$. Eine normale, einfache und nicht triviale Partition σ von G besteht aus den zyklischen Untergruppen von G der Ordnungen 4, 5, 6.

Dies zeigt, daß Existenz nicht-trivialer Partitionen, Einfachheit von $\mathfrak{S}G$ und Nicht-Einfachheit von G verträglich sind. Wir werden diese Situation an anderer Stelle genauer untersuchen.

Literaturverzeichnis

[1] R. Baer, Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. 75, 333—372 (1961).
[2] M. Hall, Jr., The Theory of Groups. New York 1959.

Eingegangen am 25. 2. 1961

Anschrift des Autors:
Reinhold Baer
Mathematisches Seminar der Universität
Frankfurt (Main)

Produkte nilpotenter Gruppen

Von

Otto H. Kegel

Eine Fragestellung von P. Hall ([1], [2]) verallgemeinernd warf Wielandt 1951 [4] die Frage auf, ob eine endliche Gruppe stets auflösbar ist, wenn sie sich als Erzeugnis von paarweise miteinander vertauschbaren, nilpotenten Untergruppen darstellen läßt. Daß auch jede endliche, auflösbare Gruppe eine solche Darstellung zuläßt, hat Hall in [1] gezeigt. Eine Verallgemeinerung der Hallschen Charakterisierung endlicher, auflösbarer Gruppen ist enthalten in folgendem, die Wielandtsche Frage beantwortendem

Satz 1. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn sie nilpotente Untergruppen $G_1, \dots, G_k$ enthält, die $G_iG_j = G_jG_i$ für alle i, j $(1 \leqq i, j \leqq k)$ und*

$$G_1G_2 \cdots G_k = G$$

erfüllen.

Da es nach Hall in jeder endlichen, auflösbaren Gruppe G bereits Sylowgruppen von G gibt, die eine solche Faktorisation von G leisten, so genügt es also, die Auflösbarkeit von G nachzuweisen, falls G eine Faktorisation durch paarweise miteinander vertauschbare, nilpotente Untergruppen zuläßt. In [4], Satz 1 hat Wielandt gezeigt, daß es ausreicht, dies für alle Produkte $G_iG_j = G_jG_i$ zu wissen. Satz 1 folgt daher aus dem spezielleren

Satz 2. *Läßt sich die Gruppe G in der Form $G = AB$ mit endlichen, nilpotenten A und B darstellen, so ist G auflösbar.*

Unter der Annahme, daß A und B teilerfremde Ordnungen haben, hat Wielandt diesen Satz in [5] bewiesen. Dies ist in der Tat der Hauptteil des Beweises von Satz 2. Die Handhabe für die Erledigung des Falles, daß die Ordnungen von A und B nicht teilerfremd sind, liefert der folgende, wohl auch für sich interessante

Satz 3. *Die endliche Gruppe G ist genau dann nicht-einfach, wenn es Untergruppen A und B, $A \neq 1 \neq B$, von G gibt derart, daß A mit jeder zu B konjugierten Untergruppe B^g von G vertauschbar ist, und außerdem $G \neq AB$ gilt. — A oder B ist dann in einem echten Normalteiler von G enthalten.*

Beweis. Ist G nicht-einfach, dann setze man $A = B = N$, wobei N ein nichttrivialer Normalteiler von G ist. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung gezeigt. — Um sich ihres Hinreichens zu vergewissern, betrachte man Untergruppen A und B von G, die der Voraussetzung des Satzes genügen. Sei A_1 maximal unter den Unter-

gruppen von G, die zusammen mit B den Voraussetzungen des Satzes genügen und A enthalten. Ist A_1 Normalteiler von G, so sind wir fertig. Also können wir annehmen, daß $N(A_1) \neq G$ ist. Ist das Element h von G nicht im Normalisator $N(A_1)$ enthalten, dann ist $\{A_1, A_1{}^h\} \neq A_1$, und $\{A_1, A_1{}^h\}$ ist mit B und allen seinen Konjugierten vertauschbar. Wegen der Maximalität von A_1 ist dann $G = \{A_1, A_1{}^h\} B$.

Es gilt nun $B \subseteqq N(A_1)$; denn gäbe es ein $b \in B$, $b \notin N(A_1)$, so wäre $G \neq A_1 B = \{A_1, A_1{}^h\} B = G$, was nicht geht. — Aber A_1 ist auch maximal unter den mit B^g die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllenden Untergruppen von G. Daher ist $B^g \subseteqq N(A_1)$ für jedes $g \in G$. Also ist $\{B^G\} \subseteqq N(A_1)$; und da A_1 in G nicht normal ist, so $\{B^G\}$ ein B enthaltender, echter Normalteiler von G.

Bemerkung. Satz 3 enthält eine wesentliche Verallgemeinerung eines Satzes von Szép [3]. — Daß Satz 3 allgemein in Gruppen gilt, die der Maximalbedingung für Untergruppen genügen, also in Noetherschen Gruppen, ist klar. — Ohne Einschränkungen gilt Satz 3 in folgender Form: *Eine (beliebige) Gruppe G ist genau dann nicht-einfach, wenn es zwei Untergruppen A und B, $A \neq 1 \neq B$, von G gibt, so daß A mit B^g für jedes $g \in G$ vertauschbar ist und $AB \neq G$, jedoch $\{A, A^h\} B = G$ gilt für jedes $h \in G$, das A nicht normalisiert.*

Beweis von Satz 2. Angenommen, der Satz sei nicht richtig; dann gäbe es unter den endlichen Gruppen, die Gegenbeispiele bilden, eine Gruppe G von minimaler Ordnung: $G = AB = BA$ ist nicht auflösbar, aber die Faktoren A und B sind nilpotent. Nach [5] können wir daraus schließen: $(o(A), o(B)) \neq 1$.

Ist p ein gemeinsamer Primteiler von $o(A)$ und $o(B)$, so sind (nach [4], Satz 8) die p-Sylowgruppen A_p und B_p von A bzw. B miteinander vertauschbar. Nun ist aber $G = AB^g$ für jedes $g \in G$ (denn g hat die Form $g = ba$, also ist $G = AB^a = AB^{ba} = AB^g$); daher ist A_p mit $B_p{}^g$ für jedes $g \in G$ vertauschbar. Da G nicht auflösbar ist, also auch keine p-Gruppe, so ist $A_p B_p \neq G$. Damit erfüllen A_p und B_p in G die Voraussetzungen von Satz 3, und G ist nicht-einfach.

Ist K ein minimaler Normalteiler von G, so ist G/K durch AK/K und BK/K nilpotent faktorisiert und daher — wegen der Minimalität von G — auflösbar. Da G aber nicht auflösbar ist, so ist K ein direktes Produkt isomorpher, nicht-abelscher, einfacher Gruppen.

Wäre nun AK eine echte Untergruppe von G, so ergibt der Dedekindsche Modulsatz, daß $AK = A(AK \cap B)$ nilpotent faktorisiert ist; und aus der Minimalität von G folgt, daß AK — und damit natürlich auch K — auflösbar ist. Das kann aber nicht sein; denn K ist nicht auflösbar. Daher ist $AK = BK = G$. Die Nilpotenz von A, B und G/K ergibt dann: $KA_p = KB_p$ ist ein Normalteiler von G.

Nun ist A_p mit jeder zu B_p unter G konjugierten Untergruppe vertauschbar, also auch mit jeder zu B_p unter KA_p konjugierten Untergruppe. Da aber KA_p keine p-Gruppe ist, so folgt aus Satz 3, daß entweder A_p oder B_p in einem echten Normalteiler von KA_p liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man daher annehmen, A_p liege in einem echten Normalteiler von KA_p. Sei L die normale Hülle von A_p in KA_p, i.e. der kleinste Normalteiler von KA_p, der A_p enthält. Dann folgt aus dem Modulsatz und aus $L \neq KA_p$

$$L = (L \cap K) A_p \text{ mit } D = L \cap K \neq K.$$

Jeder Automorphismus von KA_p, der A_p festläßt, läßt auch die normale Hülle L von A_p in KA_p fest; insbesondere läßt ein solcher Automorphismus von KA_p auch den Durchschnitt $D = L \cap K$ fest (denn als maximaler perfekter Normalteiler von KA_p ist K sogar charakteristisch). Nun induziert aber die Untergruppe A von G in dem Normalteiler KA_p von G eine Gruppe von Automorphismen, die natürlich A_p festläßt. Daher ist A im Normalisator von D enthalten. Aber D ist als Normalteiler von K direkter Faktor von K, und $G = KA$; daher ist D normal in G. Nun ist aber K minimaler Normalteiler von G; wegen $D \neq K$ ist also $D = 1$.

Wegen $L = DA_p = A_p$ heißt das, daß A_p Normalteiler von G ist. Als p-Gruppe ist A_p auch auflösbar. Aber G/A_p ist nilpotent faktorisiert, also — wegen der Minimalität von G — auflösbar. Daher ist G auflösbar. Dies widerspricht jedoch der Annahme, G sei nicht auflösbar. Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches Gegenbeispiel geben kann. — Damit ist Satz 2 (und also auch Satz 1) bewiesen.

Für Anwendungen erweist sich der folgende Zusatz zu Satz 2 manchmal als nützlich:

Zusatz. *Ist $G = AB$ mit nilpotenten (endlichen) A und B, und ist $A \neq G \neq B$, so ist entweder A oder B in einem echten Normalteiler von G enthalten*).*

Beweis. Sei der Zusatz für alle Gruppen bewiesen, deren Ordnungen kleiner sind als $o(G)$. — Ist G eine Primärgruppe, so ist alles gezeigt, denn jede maximale Untergruppe einer nilpotenten Gruppe ist Normalteiler. Daher kann man annehmen, $o(G)$ enthält mindestens zwei verschiedene Primteiler.

Sei N ein minimaler Normalteiler von G, und gelte $AN \neq G \neq BN$, so erfüllen die Untergruppen AN/N und BN/N die Voraussetzungen des Zusatzes in G/N, also liegt — nach Induktionsvoraussetzung — eine von beiden (o. B. d. A. die Gruppe AN/N) in einem echten Normalteiler M/N von G/N; also liegt A in M, und der Zusatz stimmt in G. — Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, daß für jeden minimalen Normalteiler N von G entweder $AN = G$ oder $BN = G$ (oder beides) gilt.

Sei N ein minimaler Normalteiler von G, und gelte $AN = G$; dann ist $o(N)$ eine Potenz einer Primzahl p, denn G ist nach Satz 2 auflösbar. Sei A_p die p-Sylowgruppe der nilpotenten Gruppe A; dann ist A_pN eine p-Sylowgruppe von G und außerdem Normalteiler von G. Ist B also eine p-Gruppe, so ist B in dem echten Normalteiler A_pN von G enthalten, und der Zusatz gilt.

Man darf daher annehmen, daß $o(B)$ außer p noch einen Primteiler q ($\neq p$) besitzt. Nach [4], Satz 8 ist die q-Sylowgruppe A_q von A mit der q-Sylowgruppe B_q von B vertauschbar, und A_qB_q ist eine q-Sylowgruppe von G. Da $[G:A]$ eine p-Potenz ist, so ist jede q-Sylowgruppe von A bereits eine q-Sylowgruppe von G; daher ist B_q in A_q enthalten. Dann liegen mit B_q auch alle zu B_q konjugierten Untergruppen von G in A_q und daher auch der von ihnen erzeugte Normalteiler M. Da M in A liegt, so ist nach unserer einleitenden Bemerkung $MB = G$ anzunehmen. Das heißt: $A_qB_q = MB_q = A_q$ ist ein Normalteiler von G, und $[G:B]$ ist eine q-Potenz.

---

*) Zusatz bei der Korrektur am 27. 3. 1961: Unter Benutzung von Satz 2 hat inzwischen auch Herr Z. JANKO unabhängig diese Aussage bewiesen.

Hat $o(G)$ nur die Primteiler p und q, so sind die p-Sylowgruppe NA_p und die q-Sylowgruppe A_q von G Normalteiler; G ist also nilpotent. Dann gilt aber der Zusatz; denn in einer nilpotenten Gruppe ist jede maximale Untergruppe Normalteiler.

Hat $o(G)$ aber noch einen dritten Primteiler r ($p \neq r \neq q$), so ist die r-Sylowgruppe B_r von B in der r-Sylowgruppe A_r von A enthalten. Weil aber $[G : B]$ eine q-Potenz ist, so ist jede r-Sylowgruppe von B bereits r-Sylowgruppe von G, so daß also $A_r = B_r$ eine r-Sylowgruppe von G ist. Da A und B nilpotent sind, so ist A_r ein Normalteiler von G. Es gilt jedoch $AA_r = A \neq G \neq B = BB_r$; die Existenz eines solchen Normalteilers war jedoch eingangs ausgeschlossen worden. — Damit ist der Zusatz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] P. Hall, A characteristic property of soluble groups. J. London Math. Soc. **12**, 198—200 (1937).

[2] P. Hall, On the Sylow systems of a soluble group. Proc. London Math. Soc., II. Ser., **43**, 316—323 (1937).

[3] J. Szép, Bemerkung zu einem Satz von Ore. Publ. Math. Debrecen **3**, 81—82 (1953).

[4] H. Wielandt, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951).

[5] H. Wielandt, Über Produkte nilpotenter Gruppen. Illinois J. Math. **2**, 611—618 (1958).

Eingegangen am 24. 11. 1960

Anschrift des Autors:
Otto H. Kegel
Mathematisches Seminar der Universität
Frankfurt (Main)

An Analogue of a Theorem of MAGNUS

By

MARTIN GREENDLINGER *)

In [2], W. MAGNUS proved that the normal closure of a cyclic subgroup of a free group determines the generator of the cyclic subgroup up to an inversion and a conjugation. He used this result to show that every Nielsen automorphism of a group with a single defining relator maps this defining relator onto a free transform of itself or of its inverse.

In the present note, the number of symbols in the word W will be called the length of W and will be denoted by $l(W)$.

I am grateful to Professor WILHELM MAGNUS for his inspiration and guidance.

Let F be a free group generated by:

$$a_1, a_2, \ldots.$$

Let N be the normal closure of a subgroup, S, of F. Suppose there exists at least one set, $\mathscr{A}$, of words, $A_1, A_2, \ldots$, on the symbols $a_\mu^{\mp 1}$ with the following properties:

(i) S is generated by the A_i.

(ii) Every cyclic permutation of every A_i is freely reduced.

(iii) If B_i is a cyclic permutation of A_i and X_j is a cyclic permutation of A_j^{-1}, then either $< \frac{1}{6}$ of the symbols in B_i can be deleted by freely reducing the product $B_i X_j$, or else $j = i$ and $B_i = X_i^{-1}$.

We shall prove the following

Theorem. *N uniquely determines the cardinality of the set $\mathscr{A}$. N determines the words in $\mathscr{A}$ up to inversions and cyclic permutations.*

Proof. Suppose N is also the normal closure of S' and there exists a set, $\mathscr{A}'$, of words, $A_1', A_2', \ldots$, satisfying (i)—(iii). Consider all $1-1$ mappings from the words in a subset, $\mathscr{B}$, of $\mathscr{A}$ onto those in a subset, $\mathscr{B}'$, of $\mathscr{A}'$ which map each word onto a cyclic permutation of itself or of its inverse. Let φ be one such mapping for which both $\mathscr{B}$ and $\mathscr{B}'$ are maximal.

Suppose that at least one of the sets $(\mathscr{A} - \mathscr{B})$ and $(\mathscr{A}' - \mathscr{B}')$ is not empty. Say A_i' is a word of minimal length in the set $(\mathscr{A} - \mathscr{B}) \cup (\mathscr{A}' - \mathscr{B}')$. If we write A_i' around a circle obtaining the circular word C, and consider the group, G, determined by the

*) Work on this problem was supported by the National Science Foundation Post-Doctoral Fellowship 40102.

generators:

$$a_1, a_2, \ldots$$

and the defining relators:

$$A_1, A_2, \ldots$$

we can apply Corollary II of [1], since $A'_i \in N$ and therefore $A'_i = 1$ in G. We obtain one of the following possibilities:

Case I. C is $A_k^{\pm 1}$ written around a circle:

Case IA. $A_k \in \mathscr{B}$:

Then $\varphi(A_k) = A'_j \in \mathscr{B}'$, implying $i \neq j$. It follows that all the symbols of some cyclic permutation, B'_i, of A'_i can be deleted by freely reducing the product $B'_i X_j$, where X_j is an appropriate cyclic permutation of $A'^{\pm 1}_j$. This violates property (iii) for the set $\mathscr{A}'$. We conclude that this case cannot occur.

Case IB. $A_k \notin \mathscr{B}$:

Then we can extend the mapping, φ, by setting $\varphi(A_k) = A'_i$. This violates the maximality of both $\mathscr{B}$ and $\mathscr{B}'$. We conclude that this case cannot occur.

Case II. C contains disjointly U and V, each $> \frac{5}{6}$ of a cyclic permutation of some $A_h^{\pm 1}$:

Say cyclic permutations of A_k and A_l contain $U^{\pm 1}$ and $V^{\pm 1}$, respectively, with $l(U) > \frac{5}{6}\, l(A_k)$ and $l(V) > \frac{5}{6}\, l(A_l)$.

Case IIA. At least one of the two words, A_k and A_l, belongs to $\mathscr{B}$:

Say $A_k \in \mathscr{B}$. Then $\varphi(A_k) = A'_i \in \mathscr{B}'$, implying $i \neq j$. It follows that $> \frac{5}{6}$ of the symbols of some cyclic permutation, B'_i, of A'_i can be deleted by freely reducing the product $B'_i X_j$, where X_j is an appropriate cyclic permutation of $A'^{\pm 1}_j$. This violates property (iii) for the set $\mathscr{A}'$. We conclude that this case cannot occur.

Case IIB. $A_k \notin \mathscr{B}$ and $A_l \notin \mathscr{B}$:

It follows from the minimal length of A'_i that $l(A'_i) \leqq l(A_k)$ and $l(A'_i) \leqq l(A_l)$. Therefore, $l(A'_i) \geqq l(U) + l(V) > \frac{5}{6}\, l(A_k) + \frac{5}{6}\, l(A_l) \geqq \frac{5}{3}\, l(A'_i)$. We conclude that this case cannot occur.

Case III. C contains disjointly T, U, and V, each $> \frac{1}{2}$ of a cyclic permutation of some $A_h^{\pm 1}$:

Say cyclic permutations of A_k, A_l, and A_m contain $T^{\pm 1}$, $U^{\pm 1}$, and $V^{\pm 1}$, respectively, with $l(T) > \frac{1}{2}\, l(A_k)$, $l(U) > \frac{1}{2}\, l(A_l)$, and $l(V) > \frac{1}{2}\, l(A_m)$.

Case IIIA. At least one of the three words A_k, A_l, and A_m belongs to $\mathscr{B}$:

Say A_k belongs to $\mathscr{B}$. Then $\varphi(A_k) = A'_j \in \mathscr{B}'$, implying $i \neq j$. It follows that $> \frac{1}{2}$ of the symbols of some cyclic permutation, B'_i, of A'_i can be deleted by freely reducing the product $B'_i X_j$, where X_j is an appropriate cyclic permutation of $A'^{\pm 1}_j$. This violates property (iii) for the set $\mathscr{A}'$. We conclude that this case cannot occur.

Case IIIB. $A_k \notin \mathscr{B}$, $A_l \notin \mathscr{B}$, and $A_m \notin \mathscr{B}$:

It follows from the minimal length of A_i' that $l(A_i') \leqq l(A_k)$, $l(A_i') \leqq l(A_l)$, and $l(A_i') \leqq l(A_m)$. Therefore,

$$l(A_i') \geqq l(T) + l(U) + l(V) > \frac{1}{2}\, l(A_k) + \frac{1}{2}\, l(A_l) + \frac{1}{2}\, l(A_m) \geqq \frac{3}{2}\, l(A_i').$$

We conclude that this case cannot occur.

It follows that the set $(\mathscr{A} - \mathscr{B}) \cup (\mathscr{A}' - \mathscr{B}')$ is empty, and so φ is a mapping of $\mathscr{A}$ onto $\mathscr{A}'$. This proves the theorem.

Corollary. *If a group G is presented by means of defining relators satisfying* (ii) *and* (iii), *and if some complete set of free transforms of the images of these relators under a Nielsen automorphism α of G also satisfies* (ii) *and* (iii), *then the restriction of α to the relators is the product of two mappings, β and γ, where β is a permutation of the set of defining relators, and γ maps each defining relator onto a free transform of itself or of its inverse.*

Bibliography

[1] M. Greendlinger, On Dehn's Algorithm for the Conjugacy and Word Problems, with Applications. Commun. Pure Appl. Math. **13**, 641–677 (1960).

[2] W. Magnus, Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation. J. reine angew. Math. **163**, 141–165 (1930). (See the theorem on equivalent relations, p. 157.)

Eingegangen am 15. 12. 1960

Anschrift des Autors:
Martin Greendlinger
Department of Mathematics
New York University
25 Waverly Place
New York (N.Y.), USA

Primitive Matrix Rings*)

By

EDWARD C. POSNER**)

Recently ([1], Theorem 1; [2], Proposition 2; [3], Theorem 3.4; [4], p. 57, prob. 7) several authors have shown that if R is a ring containing a unit, and R_n, the ring of $n \times n$ matrices over R, is primitive, then so is R itself. This is done by classifying the unital modules over R_n. In this paper, we do the same for arbitrary rings. The modifications are not as trivial as usual.

Theorem 1. *Let R be a ring, n an integer $\geqq 1$, and R_n the ring of $n \times n$ matrices over R. Let M be a left R_n-module. Let $R_n M = M$, and let M have no trivial submodule (i.e., $R_n m = 0$ for $m \in M$ implies $m = 0$). Then M arises from an R-module $\overline{M}$. That is, there exists a left R-module $\overline{M}$ and n isomorphisms $f_i : \overline{M} \to \overline{M}_i \subset M$ such that $M = \overline{M}_1 \dotplus \cdots \dotplus \overline{M}_n$ when M is considered as an R-module over the subring of scalar matrices of R_n, and such that, if $r \in R$ and r_{ij} is the element of R_n whose only non-zero entry is an r in the ij^{th} place, then r_{ij} acts on M by mapping every $\overline{M}_k$ into zero, except for $\overline{M}_j$, which it maps into $\overline{M}_i$ as $f_i(r f_j^{-1} \overline{M}_j)$. Furthermore, the $\overline{M}_i$ are unique and equal to $I_i M$, where I_i denotes the right ideal of R_n consisting of those matrices whose only non-zero entries are in the i^{th} row. In addition, $R\overline{M} = \overline{M}$, $\overline{M}$ has no trivial submodule, and M is faithful as an R_n-module if and only if $\overline{M}$ is faithful as an R-module, M is irreducible if and only if $\overline{M}$ is irreducible.*

Proof. Since $R_n M = M$, every element of M is a sum

$$m_1 + \cdots + m_n\,, \quad m_i \in I_i M\,, \quad 1 \leqq i \leqq n\,.$$

Let J_k, $1 \leqq k \leqq n$, be the left ideal of R_n consisting of matrices where k^{th} column is the only column with non-zero entries. Then $J_k I_i = 0$, $i \neq k$, so that, if

$$m_1 = m_2 + \cdots + m_n\,, \quad m_i \in I_i M\,, \quad 1 \leqq i \leqq n\,,$$

$J_1 m_2 = \cdots = J_1 m_n = 0$, $J_1 m_1 = 0$. But $J_2 m_1 = \cdots = J_n m_1 = 0$, so that $R_n m_1 = 0$, $m_1 = 0$. This shows that $M = I_1 M \dotplus \cdots \dotplus I_n M$. Let $\overline{M}$ be an abstract R-module isomorphic to $\overline{M}_1 = I_1 M$ by an isomorphism $f_1 = \overline{M} \to \overline{M}_1$. We shall define isomorphisms $f_{ij} : \overline{M}_i \to \overline{M}_j$ such that f_{ii} is the identity on $\overline{M}_i$, and $f_{jk} f_{ij} = f_{ik}$.

---

*) Supported in part by a National Science Foundation Grant to Yale University.

**) I am indebted to Professor ROSENBERG of Northwestern University for valuable discussion in the preparation of this paper.

We then define $f_j : \overline{M} \to \overline{M}_j$ as $f_{1j} f_1$. (The mapping property of the r_{ij} will be automatically fulfilled.) Let $m_i \in \overline{M}_i$, so that

$$m_i = a_1 m_{i1} + \cdots + a_n m_{in}, \quad m_{ij} \in M, \quad 1 \leqq j \leqq n, \quad a_k \in I_i, \quad 1 \leqq k \leqq n.$$

Let $a_k^{(j)}$ denote a_k with its i^{th} and j^{th} rows interchanged, and define

$$f_{ij}(m_i) = a_1^{(j)} m_{i1} + \cdots + a_n^{(j)} m_{in}.$$

To verify that f_{ij} is well-defined, suppose

$$a_1 m_{i1} + \cdots + a_n m_{in} = 0,$$

and prove

$$a_1^{(j)} m_{i1} + \cdots + a_n^{(j)} m_{in} = 0.$$

Now for $1 \leq k \leq n$, r_{kj} acting on $a_1^{(j)} m_{i1} + \cdots + a_n^{(j)} m_{in}$ is equal to r_{ki} acting on $a_1 m_{i1} + \cdots + a_n m_{in}$, and hence is zero. But r_{kl}, $l \neq j$, also annihilates this element, which is therefore annihilated by R_n, and hence is zero. Thus f_{ij} is well-defined. Similarly, f_{ij} is one-to-one, and compatible with the action of R. The other properties of the f_{ij} are also immediate. Furthermore, $\overline{M}_1$ has no trivial submodule, as is easy to see, and $R\overline{M}_1 = \overline{M}_1$, for

$$\overline{M}_1 \subset M = R_n M = R_n^2 M = (J_1 + \cdots + J_n)(I_1 + \cdots + I_n) M =$$
$$= J_1 I_1 M + \cdots + J_1 I_n M = R\overline{M}_1 + \cdots + R\overline{M}_n.$$

Since $R\overline{M}_i \subset \overline{M}_i$, $\overline{M}_1 = R\overline{M}_1$ by directness. To prove uniqueness, let M be expressible as an internal R-module direct sum $N_1 \dotplus \cdots \dotplus N_n$, where R_n acts on this sum as matrices. Then for all $r \in R$, $r_{ij} N_j \subset N_i \cap \overline{M}_i$, $r_{ik} N_j = 0$, $k \neq j$, so that

$$R_n M = R_n (N_1 + \cdots + N_n) \subset N_1 \cap \overline{M}_1 + \cdots + N_n \cap \overline{M}_n,$$
$$\overline{M}_1 + \cdots + \overline{M}_n = N_1 \cap \overline{M}_1 + \cdots + N_n \cap \overline{M}_n.$$

Thus, $N_i \cap \overline{M}_i = \overline{M}_i$, $N_i \supset \overline{M}_i$, $N_i = \overline{M}_i$ as required.

Next, M is a faithful R_n-module if and only if $\overline{M}_1$ is a faithful R-module. For if $r \in R$, and r acts as zero on $\overline{M}_1$, then r_{11} acts as zero on M. And if the matrix $a = (a_{ij})$ annihilates M, then the $j_0{}^{\text{th}}$ column of a annihilates $\overline{M}_{j_0}$ since the other columns always do. But the $i_0{}^{\text{th}}$ component of the image of $\overline{M}_{j_0}$ under the matrix which is zero except in the $j_0{}^{\text{th}}$ column where it agrees with a, is $a_{i_0 j_0} f_{j_0}(\overline{M}_{j_0})$; thus $a_{i_0 j_0}$ annihilates all of M and thus is zero if $\overline{M}_1$ is faithful. Since i_0, j_0 were arbitrary, $a = 0$ as required.

Finally, M is irreducible if and only if $\overline{M}_1$ is irreducible. For if $\overline{N}$ is a non-zero submodule of $\overline{M}_1$, then

$$\overline{N} \dotplus f_{12}(\overline{N}) \dotplus \cdots \dotplus f_{1n}(\overline{N}) = M,$$

and thus $\overline{N} = \overline{M}_1$. Conversely, if $\overline{M}_1$ is irreducible as an R-module, we prove that for all $m \in M$ not equal to zero, $R_n m = M$. Suppose we want $p_1 + \cdots + p_n$ to be

in $R_n m$ with each $p_i \in \overline{M}_i$. Suppose the first, say, component m_1 of m is not zero. Choose $a_{ij} = 0$, $j \neq 1$; a_{i1} so that $a_{i1} m_1 = p_i$, as we may do since $Rm_1 = \overline{M}_1$. Let $a = (a_{ij}) \in R_n$; then am has its i^{th} component equal to $a_{i1} m_1 + \cdots + a_{in} m_n = p_i$ as required. This completes the proof of the theorem.

One may ask to what extent the hypotheses can be relaxed in Theorem 1. If R_n, and so R, have a unit, then every left R_n-module is a direct sum of a unital module and a trivial module. Thus $R_n M = M$ is equivalent to the absence of a trivial submodule of M, and one of these two conditions cannot be relaxed without relaxing the other. And if R has absolute right divisors of zero, and K is the ideal of absolute right divisors of zero of R, then $K_n M$ is a non-zero trivial submodule of M for any faithful R_n-module M. (K_n may be shown to be the ideal of absolute right divisors of zero of R_n.) Thus if we are interested in possible counterexamples with M faithful and having no trivial submodule, we need only consider rings R with no unit and no absolute right divisors of zero. Such an R lacks a right unit, for if $re = r$ for all r in R, then $s(r - er) = 0$ for all r, s in R, so that $r - er = 0$ for all r in R, and e is a left unit. We shall construct for every such R and $n \geqq 2$ a left R_n-module M which is faithful, has no trivial submodule, but does not arise from a left R-module $\overline{M}$. Namely, first consider the left R_n-module of all ordered pairs (a, m), $a \in R_n$, m an integer, with componentwise addition, and module action $b(a, m) = (ba + mb, 0)$. Consider the trivial submodule of this module, that is, the set of all pairs (a, m) with $ba + mb = 0$ for all b in R_n. We claim that the quotient module M of the original module by its trivial submodule has the required properties. First, M is faithful. For if b annihilates every element of M, then $b(0, 1)$ is in the trivial submodule, $cb = 0$ for all c in R_n, $b = 0$. Second, M has no trivial submodule. For if $b(a, m)$ is in the trivial submodule for every b in R_n, then $cba + cbm = 0$ for every b, c in R_n. Thus $ba + bm = 0$ for every b in R_n, so that (a, m) is in the trivial submodule of the original module, as required. We can and shall think of M as the set of sums $a + m$, $a \in R_n$, m the $n \times n$ scalar matrix with entry the integer m, $a + m$ being identified with zero if $ba + mb = 0$ for all b in R_n. Suppose M arose from an R-module $\overline{M}$ as $M = \overline{M}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \overline{M}_n$ with R_n acting on this sum as matrices. Then the identity matrix 1 can be written as $m_1 + \cdots + m_n$, $m_i \in \overline{M}_i$, $1 \leqq i \leqq n$, and each $m_i = p_i + d_i$, $p_i \in R_n$, d_i a scalar matrix of the integer d_i. By definition of matrix action, $J_j \overline{M}_i = 0$, $j \neq i$. Thus for all r in R,

$$r_{jj}(p_i + d_i) = 0, \quad i \neq j, \quad \text{so that} \quad r_{jj}(1) = r_{jj} = r_{jj} p_j + d_j r_{jj}.$$

Examining the jj^{th} component of both sides, we find $r = rp_j^{(jj)} + d_j r$ for all r in R, $d_j - 1$ is in R_n as the scalar matrix of $-p_j^{(jj)}$. By absorbing $d_j - 1$ into p_j and changing notation if necessary, we can write $m_j = p_j + 1$, $p_j \in R_n$, $1 \leqq j \leqq n$. Since $n \leqq 2$, some $p_j + 1$ is annihilated by some J_i, $i \neq j$. But if p is in R_n, $p + 1$ is not annihilated by any J_i. For let $r \in R$, $j \neq i$, and consider $r_{ji} \in J_i$, so that

$$r_{ji}(p + 1) = 0.$$

Examining the ji^{th} components of this equation, we find $rp_{ij} + r = 0$, $-p_{ij}$ is a right unit for R. This contradiction completes the proof.

Now consider the condition $R_n M = M$ but M with trivial submodule, although faithful. We find an R without unit and faithful R_2-module M such that $R_2 M = M$ but M does not arise from an R-module $\overline{M}$. Let R be the ring of even integers, $Z(2^\infty)$ the subgroup of the rationals mod 1 consisting of those rational numbers whose denominator is a power of 2. Define the R_2-module M as $Z(2^\infty) \oplus Z(2^\infty) = N_1 \dotplus N_2$ say as an additive group, but with module action

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar + 2\,bs \\ \frac{c}{2}\,r + ds \end{pmatrix}.$$

A routine check shows that M is a faithful R_2-module with $R_2 M = M$. (The trivial submodule of M consists of

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.)$$

We must prove that M does not arise from an R-module $\overline{M}$. Let $M = \overline{M}_1 \dotplus \overline{M}_2$ where R_2 acts on $\overline{M}_1 \dotplus \overline{M}_2$ as matrices. Then

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} M = M,$$

so that $\overline{M}_1 = N_1$, $\overline{M}_2 = N_2$. We thus must prove that there do not exist R-module isomorphisms $f_{ij}: N_i \to N_j$, $f_{ji} f_{ij} =$ identity on N_i, $i, j = 1, 2$, such that R_2 acts on $N_1 \oplus f_{12}(N_1)$ as matrices. In particular, we would have

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,f_{21}(s) \\ 0 \end{pmatrix},$$

so that $2 f_{21}(s) = 4s$. Thus the homomorphism $2 f_{21}: N_2 \to N_1$ has a kernel of four elements, so that f_{21} is not an isomorphism. This completes the proof.

We now apply Theorem 1 to the problem of the title.

Theorem 2. *Let R be a ring, n an integer $\geqq 1$. Then R_n, the ring of $n \times n$ matrices over R, is left primitive if and only if R itself is left primitive.*

Proof. If M is a faithful irreducible left R_n-module, $R_n M = M$ and M has no trivial submodule. Reference to Theorem 1 completes the proof.

To prove the next theorem, we need the following lemma, which may be of independent interest.

Lemma. *Let R be any ring and R_n the ring of $n \times n$ matrices over R. Let Q be a semi-prime ideal of R_n (two-sided ideal modulo which there are no nilpotent ideals). Then $Q = P_n$, P a semi-prime ideal of R. Conversely, if P is a semi-prime ideal of R, then P_n is a semi-prime ideal of R_n.*

Proof. If P is a semi-prime ideal of R, and I is a two-sided ideal of R_n with $I^k \subset P_n$ for some integer k, let J be the ideal in R of coefficients of elements of I, so that $J_n \supset I$. However,

$$J_n^3 \subset R_n J_n R_n \subset I, \quad J_n^{3k} \subset P_n, \quad J^{3k} \subset P, \quad J \subset P, \quad J_n \subset P_n, \quad I \subset P_n, \quad P_n \text{ semiprime.}$$

Conversely, let Q be a semi-prime ideal of R_n. Let P be the two-sided ideal of R of coefficients of elements of Q. Then $P_n \supset Q$, but $P_n^3 \subset Q$, $P_n \subset Q$, $P_n = Q$. By the above, P is semi-prime.

The above lemma is true with "prime" replacing "semi-prime". But it is even true with "left primitive" replacing "semi-prime", as the next theorem shows.

Theorem 3. *Let R be any ring, R_n the ring of $n \times n$ matrices over R. Then the two-sided ideal Q of R_n is left primitive if and only if $Q = P_n$, P a left primitive ideal of R.*

Proof. If P is a left primitive ideal of R, with $\bar{M}$ as a faithful irreducible left module for R/P, then $(R/P)_n$ has $\bar{M} \oplus \ldots \oplus \bar{M}$ as a faithful irreducible left module. But $(R/P)_n$ is isomorphic to R_n/P_n, so P_n is a left primitive ideal of R_n. (This argument is well-known.)

Conversely, if Q is a left primitive ideal of R_n, then Q is semi-prime, so that $Q = P_n$, P an ideal of R. Since R_n/P_n is left primitive, so is $(R/P)_n$ and hence R/P, as required.

Corollary. *The radical of R_n is N_n, N the radical of R.*

Proof. The radical of R_n is the intersection of the left primitive ideals P_n of R_n, P a left primitive ideal of R. Thus a matrix is in the radical of R_n if and only if every component of the matrix is in every primitive ideal of R, i.e., if and only if every component of the matrix is in N, N the radical of R, i.e., if and only if the matrix is in N_n.

This is proved in [5], p. 11, Theorem 3, using the characterization of the radical as the largest quasi-regular left ideal.

Bibliography

[1] R. Ree, On Projective Geometry over Full Matrix Rings. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 144—150 (1955).

[2] M. Harada, Note on the Dimensions of Modules and Algebras. J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Ser. A, **7**, 17—27 (1956).

[3] K. Morita, Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with Minimum Condition. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A, **6**, 83—142 (1958).

[4] N. Bourbaki, Éléments de Mathématique. I, Livre II, Chaptaire 8, Modules et Anneaux Semi-simples. Paris 1958.

[5] N. Jacobson, Structure of Rings. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXXVII (1956).

Eingegangen am 12. 12. 1960

Anschrift des Autors:

Edward C. Posner
Yale University
New Haven (Conn.), USA

and

Harvey Mudd College
Claremont (Cal.), USA

Ein Satz über Frobeniuserweiterungen

Von

Friedrich Kasch

1. In einer früheren Arbeit [1] habe ich den Begriff der Frobeniuserweiterung eingeführt und u. a. den besonders im Hinblick auf die Galoissche Theorie der Ringe interessierenden folgenden Satz bewiesen: Unter gewissen Voraussetzungen über den Ring S ist eine freie Ringerweiterung R/S dann und nur dann Frobeniuserweiterung, wenn der Ring aller Endomorphismen von R als S-Rechtsmodul Frobeniuserweiterung des Ringes R^l der Linksmultiplikatoren von R ist. Kürzlich konnten T. Nakayama und T. Tsuzuku [2] beweisen, daß die dabei von mir über S gemachten Voraussetzungen überflüssig sind. In dieser Note möchte ich zeigen, daß man einen besonders übersichtlichen und kurzen Beweis dieses Satzes in der in [2] angegebenen allgemeinen Fassung führen kann, wenn man sich von meinem ursprünglichen Beweis in [1] völlig frei macht und nicht, wie das auch noch in [2] geschieht, duale Basen benutzt.

2. Wir stellen im Anschluß an [2] einige Voraussetzungen zusammen. Es sei R ein Ring mit 1-Element und S ein Unterring mit dem gleichen 1-Element. Betrachtet man R als S-Rechtsmodul, dann ist $H_r = \mathrm{Hom}_S(R_S, R_S)$ ein Ring, der den Ring R^l der Linksmultiplikatoren von R als Unterring enthält. Wegen $R^l \simeq R$ wollen wir für R^l wieder R schreiben, was hier nicht zu Irrtümern führen kann. In H_r ist der Modul $F_r = \mathrm{Hom}_S(R_S, S_S)$ enthalten. Schreibt man die Anwendung von $h \in H_r$ auf $x \in R$ als $h(x)$, dann ist H_r ein R-R-Modul und F_r ein S-R-Modul. Analog seien $H_l = \mathrm{Hom}_S({}_SR, {}_SR)$, $F_l = \mathrm{Hom}_S({}_SR, {}_SS)$ erklärt. Die Anwendung von $h \in H_l$ auf $x \in R$ schreiben wir in der Form $(x)h$; dann ist F_l ein R-S-Modul.

Die beiden folgenden Bedingungen $(\mathfrak{J}_r)$ und $(\mathfrak{H}_l)$ sind äquivalent und definieren R/S als Frobeniuserweiterung:

$(\mathfrak{J}_r)$ a) R besitzt eine endliche Rechtsbasis (= freies Erzeugendensystem) über S;
b) es gibt einen Isomorphismus φ der S-R-Moduln F_r und R.

$(\mathfrak{H}_l)$ a) R besitzt eine endliche Linksbasis über S;
b) es gibt einen S-S-Homomorphismus ψ von R in S mit den folgenden Eigenschaften:

1) Zu jedem $f \in F_l$ gibt es ein $r \in R$ mit $f = r\psi$, d. h. $F_l = R\psi$ (bei dieser Schreibweise wird ψ als Element aus F_l betrachtet);
2) aus $(Rr)\psi = 0$ folgt $r = 0$ für $r \in R$.

Damit äquivalent sind auch zu $(\mathfrak{J}_r)$ und $(\mathfrak{H}_l)$ analoge Bedingungen $(\mathfrak{J}_l)$ und $(\mathfrak{H}_r)$, die wir hier jedoch nicht brauchen.

Den Isomorphismus φ in $(\mathfrak{J}_r)$ nennen wir einen rechtsseitigen Frobeniusisomorphismus und den Homomorphismus ψ in $(\mathfrak{H}_l)$ einen linksseitigen Frobeniushomomorphismus.

3. Sei jetzt $w_1, \ldots, w_n$ eine Rechtsbasis von R/S, dann stellen die durch

$$d_i(w_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

definierten Abbildungen $d_1, \ldots, d_n \in H_r$ eine Linksbasis von H_r über R und ebenso eine Linksbasis von F_r über S dar. Zur Vorbereitung des Satzes beweisen wir die folgenden Eigenschaften von H_r und F_r:

(1) *Für jedes $f \in F_r$ gilt: $H_r f = R f$.*

(2) *Zu beliebigen Elementen $f_1, \ldots, f_n \in F_r$ gibt es ein $h \in H_r$ mit $d_i h = f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Beweis.

(1): Wegen $f \in F_r$ gilt $f(x) \in S$ für jedes $x \in R$; daraus folgt für beliebiges $h \in H_r$: $hf(x) = h(1 f(x)) = h(1) f(x)$, also $hf = h(1) f$.

(2): Das Element $r_i \in R$ habe die Basisdarstellung $r_i = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{ji}$, dann folgt aus der Definition der d_i unmittelbar

$$d_j \sum_{i=1}^{n} r_i d_i = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} d_i;$$

da man die $s_{ji} \in S$ beliebig vorgeben kann, folgt die Behauptung.

Nun sind wir in der Lage, den fraglichen Satz sehr einfach zu beweisen.

Satz. *Ist R ein Ring mit 1-Element, S ein Unterring mit dem gleichen 1-Element und besitzt R/S eine endliche Rechtsbasis, so gilt: Dann und nur dann ist R/S Frobeniuserweiterung, wenn $\mathrm{Hom}_S(R_S, R_S)/R$ Frobeniuserweiterung ist.*

Zum Beweis des ersten Teils zeigen wir, daß man den rechtsseitigen Frobeniusisomorphismus φ von F_r und R zu einem linksseitigen Frobeniushomomorphismus ψ von H_r auf R fortsetzen kann. Definiert man ψ durch

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i d_i\right) \psi = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(d_i) \quad \text{für} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i d_i \in H_r,$$

dann ist ψ offenbar ein zweiseitiger R-Homomorphismus von H_r auf R. Dafür haben wir die in $(\mathfrak{H}_l)$ angegebenen Eigenschaften zu beweisen, wobei jetzt H_r bzw. R an Stelle von R bzw. S zu treten hat. Ein R-Linkshomomorphismus von H_r in R ist eindeutig durch die Bilder der Linksbasis $d_1, \ldots, d_n$ bestimmt. Wegen (2) gibt es zu vorgegebenen $f_1, \ldots, f_n \in F_r$ ein $h \in H_r$ mit $d_i h = f_i$. Daher gilt $(d_i h)\psi = (f_i)\psi = \varphi(f_i)$; da φ ein Isomorphismus von F_r und R ist, folgt die erste Eigenschaft eines Frobeniushomomorphismus. Sei jetzt $h \in H_r$, $h \neq 0$, dann gibt es ein $x \in R$ mit $h(x) \neq 0$, und folglich existiert ein d_i mit $d_i h = 0$. Wegen $d_i h \in F_r$ und da φ ein Isomorphismus ist, folgt $(d_i h)\psi = \varphi(d_i h) \neq 0$, womit auch die zweite Eigenschaft eines Frobeniushomomorphismus bewiesen ist.

Zum Beweis des zweiten Teils des Satzes zeigen wir umgekehrt, daß der nach Voraussetzung vorhandene linksseitige Frobeniushomomorphismus ψ von H_r auf R ein-

geschränkt auf F_r einen rechtsseitigen Frobeniusisomorphismus von F_r und R liefert. Für diese Einschränkung schreiben wir φ, so daß also $\varphi(f) = (f)\psi$ für $f \in F_r$ gilt. Da ψ ein zweiseitiger R-Homomorphismus ist, ist zunächst φ ein S-R-Homomorphismus von F_r in R.

Behauptung: φ ist ein Monomorphismus. Für $f \in F_r$ folgt aus $\varphi(f) = (f)\psi = 0$ zunächst $(Rf)\psi = 0$ und wegen (1) sogar $(H_r f)\psi = 0$, also nach Voraussetzung $f = 0$.

Behauptung: φ ist ein Epimorphismus. Für beliebiges $r \in R$ wird durch

$$(d_1)\,\sigma = r\,, \quad (d_i)\,\sigma = 0 \text{ für } i > 1$$

ein R-Linkshomomorphismus σ von H_r in R definiert. Dazu gibt es nach Voraussetzung ein $h \in H_r$ mit $\sigma = h\psi$. Dann folgt $\varphi(d_1 h) = (d_1 h)\psi = r$, d. h. φ ist ein Epimorphismus. Damit ist der Beweis beendet.

Wir weisen noch darauf hin, daß wir beim zweiten Teil von der Voraussetzung, daß eine Rechtsbasis von R/S existiert, nur in der Form Gebrauch gemacht haben, daß eines der Basiselemente von H_r über R bereits in F_r liegt. Für den Nachweis, daß die Einschränkung von ψ ein Monomorphismus ist, haben wir sie nicht benutzt. Es erhebt sich die Frage, ob diese Voraussetzung überhaupt zu vermeiden ist.

Literaturverzeichnis

[1] F. Kasch, Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. Math. Ann. **127**, 453–474 (1954).

[2] T. Nakayama and T. Tsuzuku, A remark on Frobenius extensions and endomorphism rings. Nagoya Math. J. **15**, 9–16 (1959).

Eingegangen am 15. 10. 1960

Anschrift des Autors:
Friedrich Kasch
Mathematisches Institut der Universität
Heidelberg, Tiergartenstraße

Über die Assoziativformel und die Lechsche Formel in der Multiplizitätstheorie

Von

HANS-JOACHIM NASTOLD

Die Assoziativformel für die Multiplizität eines Parameterideals (vgl. [8], S. 41) wurde für geometrische lokale Ringe erstmals von CHEVALLEY [2], für beliebige lokale Ringe von NAGATA [6] bewiesen. Schließlich gab CH. LECH [5] einen vereinfachten Beweis an mit Hilfe der hier als Lechsche Formel bezeichneten Beziehung

$$e(x_1, \ldots, x_r) = \lim_{n_i \to \infty} \frac{1}{n_1 \cdots n_r} \, l(R/(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}))\,.$$

Eine Assoziativformel für Parameterideale in bezug auf einen Modul auf dem Lechschen Wege bewiesen findet sich bei HABICHT [3]. Inzwischen haben sich homologische Methoden in der Theorie der lokalen Ringe als fruchtbar erwiesen (AUSLANDER-BUCHSBAUM [1] und SERRE [9]). Es interessiert daher ein Beweis der Assoziativformel in diesem Rahmen. Da in der Literatur m. W. ein solcher nicht vorhanden ist, soll hier im Anschluß an [1] und [9] ein kurzer induktiver Beweis der Assoziativformel für endlich erzeugte Moduln über einem beliebigen noetherschen Ring gegeben werden. Wir benutzen dabei nur drei einfache Eigenschaften des Symbols $e(E, x_1, \ldots, x_r)$, die dieses nach [1] kennzeichnen. Man erhält diese wie in [1] unmittelbar aus dem Zusammenhang der Multiplizität mit dem Koszulkomplex. Letzterer ist für die Schnitttheorie in der algebraischen und arithmetischen Geometrie nach SERRE [9] grundlegend. Anschließend gewinnen wir umgekehrt aus der Assoziativformel die Lechsche Formel, welche sich zur Berechnung der Multiplizität in Tensorprodukten als sehr nützlich erweist [4].

1. Das Symbol $e(E, x_1, \ldots, x_r)$. A sei im folgenden stets ein noetherscher Ring, kommutativ mit Einselement, E ein endlich erzeugter A-Modul. $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r$, $\boldsymbol{y} = y_1, \ldots, y_s$ usw. bezeichne Systeme von Elementen *aus dem Radikal*[1]) $\mathfrak{r}(A)$ von A, $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_s)$ usw. die von ihnen erzeugten Ideale.

Das Elementsystem $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r \subset \mathfrak{r}(A)$ erfülle nun bezüglich des A-Moduls E die *Voraussetzung*: $E/\mathfrak{x}E$ v. e. L. (von endlicher Länge). Dann ist $l(E/\mathfrak{x}^n E)$, die Länge von $E/\mathfrak{x}^n E$, endlich und für große n ein Polynom in n, das *Samuelsche Polynom* $P_{\mathfrak{x}}(E, n)$ [9]. Aus SERRE [9], chap. III entnehmen wir die Gleichheit der folgenden drei Zahlen:

(i) Grad des Samuelschen Polynoms $P_{\mathfrak{x}}(E, n)$.

---

[1]) Gemeint ist das Jacobson-Radikal, der Durchschnitt aller maximalen Ideale von A.

(ii) Maximale Länge m einer Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ [2]) aus A mit Ann $(E) \subset \subset \mathfrak{p}_0$ [3]).

In der Serreschen Bezeichnung bilden die Primideale $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}(E)$ gerade die „Varietät" $V(E)$ von E.

(iii) Minimalanzahl r von Elementen $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r \subset \mathfrak{r}(A)$ mit $E/\mathfrak{x}E$ v.e.L.

Wir bezeichnen diese Zahlen als die Dimension von E: $\dim E$. Nach (ii) ist $\dim E = \dim A/\mathrm{Ann}(E)$ und nach (i) der Grad des Samuelschen Polynoms gleich $\dim E$, also von $\mathfrak{x}$ unabhängig.

Wir definieren nun das Symbol $e(E, \boldsymbol{x})$, ausführlich $e^A(E, x_1, \ldots, x_r)$, folgendermaßen.

Definition. *Für $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r \subset \mathfrak{r}(A)$ und $E/\mathfrak{x}E$ v.e.L. sei*

$$e(E, x_1, \ldots, x_r) = \Delta^r P_{\mathfrak{x}}(E, n) = \begin{cases} e(E, \mathfrak{x}) \text{ für } \dim E = r \\ 0 \text{ sonst, d. h. für } \dim E < r, \end{cases}$$

wo Δ den Differenzenoperator $(\Delta P)(n) = P(n+1) - P(n)$ bedeutet.

Nach Definition ist für $(x_1, \ldots, x_r) = (y_1, \ldots, y_r)$ $e(E, \boldsymbol{x}) = e(E, \boldsymbol{y})$. Das Symbol $e(E, \boldsymbol{x})$ hängt also nur von dem vom Elementsystem $\boldsymbol{x}$ erzeugten Ideal $\mathfrak{x}$ und der Zahl r ab und ist, falls E die richtige Dimension besitzt, gleich der üblichen Multiplizität $e(E, \mathfrak{x})$. Die hier gegebene Definition ist für unsere Zwecke nützlich und erspart Fallunterscheidungen.

Nach Serre [9] und Auslander-Buchsbaum [1] gilt, wenn $H_i(E, \boldsymbol{x})$ die i-te Homologiegruppe des Koszulkomplexes $K^A(E, \boldsymbol{x})$ [1] von E zum Elementsystem $\boldsymbol{x}$ bezeichnet:

Es ist

$$e(E, \boldsymbol{x}) = \chi(E, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, l(H_i(E, \boldsymbol{x})).$$

Damit ergeben sich unmittelbar (s. [1]) die folgenden Eigenschaften von $e(E, \boldsymbol{x})$:

A) *Ist*

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

exakt und $E/\mathfrak{x}E$ v.e.L., so sind auch $E'/\mathfrak{x}E'$ und $E''/\mathfrak{x}E''$ v.e.L., und es ist

$$e(E, \boldsymbol{x}) = e(E', \boldsymbol{x}) + e(E'', \boldsymbol{x})$$

(Additivität von $e(E, \boldsymbol{x})$).

B) $e(E, \boldsymbol{x}) = 0$ *genau dann, wenn* $\dim E < r$.

C) *Ist x_r Nichtnullteiler von E, so ist*

$$e^A(E, x_1, \ldots, x_r) = e^{A/(x_r)}(E/x_r E, x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

ferner $e(E, \emptyset) = l(E)$. (Hier ist $(\emptyset) = (0)$ zu setzen und $E/(0)E \cong E$ v.e.L. vorauszusetzen.)

---

[2]) $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ heißt $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$.

[3]) $\mathrm{Ann}(E)$ = Annullator von E, die Menge der Elemente $x \in A$ mit $x \cdot E = 0$.

Satz 1. *$e(E, \boldsymbol{x})$ ist durch die Eigenschaften* A)—C) *eindeutig charakterisiert.*

Beweis. Wir zeigen die eindeutige Bestimmtheit des Symbols $e(E, \boldsymbol{x})$ durch Induktion nach der Elementezahl r von $\boldsymbol{x}$. $r = 0$: C). Es sei also $e(E, \boldsymbol{x})$ schon für alle Elementsysteme $\boldsymbol{x}$ der Länge $r - 1$ eindeutig bestimmt. Dann ist für $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r \subset \mathfrak{r}(A)$ und $E/\mathfrak{x}E$ v.e.L. $\dim E \leq r$ (nach Definitionseigenschaft (iii) von $\dim E$). Nach SERRE [9], chap. I gibt es nun in E eine Reihe von Untermoduln

$$E = E_n \supset E_{n-1} \supset \ldots \supset E_0 = (0)$$

mit $E_i/E_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i$ Primideal in A, $\mathfrak{p}_i \in V(E)$. Mit A) und B) ist nun

$$e(E, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} e(A/\mathfrak{p}_i, \boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{i=1 \\ \dim \mathfrak{p} = r}}^{n} e(A/\mathfrak{p}_i, \boldsymbol{x}) = \sum_{\dim \mathfrak{p} = r} l(E_\mathfrak{p}) \cdot e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}),$$

letzteres weil $l(E_\mathfrak{p}) =$ Anzahl der $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$, insbesondere $= 0$ für $\mathfrak{p} \notin V(E)$. Für die in der letzten Summe auftretenden $\mathfrak{p}$ ist $(A/\mathfrak{p})/\mathfrak{x}(A/\mathfrak{p}) \simeq A/\mathfrak{p} + \mathfrak{x}$ v.e.L. Wäre $x_r \in \mathfrak{p}$, so wäre

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{x} = \mathfrak{p} + (x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

also $(A/\mathfrak{p})/(x_1, \ldots, x_{r-1})(A/\mathfrak{p})$ v.e.L., d. h. $\dim (A/\mathfrak{p}) \leq r - 1$, entgegen $\dim \mathfrak{p} = r$.

Somit ist x_r Nichtnullteiler von $A/\mathfrak{p}$ und mit $\overline{A} = A/(x_r)$, $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} + (x_r)/(x_r) \subset \overline{A}$ ist nach C)

$$e(E, \boldsymbol{x}) = \sum_{\dim \mathfrak{p} = r} l(E_\mathfrak{p}) \cdot e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\dim \mathfrak{p} = r} l(E_\mathfrak{p}) \cdot e^{\overline{A}}(\overline{A}/\bar{\mathfrak{p}}, x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

und die $e^{\overline{A}}(\overline{A}/\bar{\mathfrak{p}}, x_1, \ldots, x_{r-1})$ sind nach Induktionsvoraussetzung bereits eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt also auch für $e(E, x_1, \ldots, x_r)$.

2. Die Assoziativformel. Im Anschluß an den Beweis von Satz 1 beweisen wir nun

Satz 2 (Assoziativformel). *Ist $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s \subset \mathfrak{r}(A)$ und $E/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})E$ v.e.L., so gilt*

$$e(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot e^{A_\mathfrak{p}}(E_\mathfrak{p}, \boldsymbol{y}), \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{p}$ alle Primideale von A, die zu $E/\mathfrak{y}E$ minimal assoziiert sind, also alle minimalen Primoberideale von $\mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E)$, für die $\dim \mathfrak{p} + \dim E_\mathfrak{p} = \dim E$, durchläuft. Die zweite Summationsbedingung kann weggelassen werden: Sie gibt, falls nicht alle Summanden verschwinden, genau die von 0 verschiedenen Summanden an.

Bemerkungen. 1. Für alle minimal zu $E/\mathfrak{y}E$ assoziierten Primideale sind $e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x})$ und $e^{A_\mathfrak{p}}(E_\mathfrak{p}, \boldsymbol{y})$ definiert, d. h. es ist

a) $(A/\mathfrak{p})/\mathfrak{x}(A/\mathfrak{p})$ v.e.L.: Die Voraussetzung $E/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})E$ v.e.L. ist mit $A/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \mathrm{Ann}(E)$ v.e.L. äquivalent. Nun gilt $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E)$, also $\mathfrak{x} + \mathfrak{p} \supset (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \mathrm{Ann}(E)$ und folglich $(A/\mathfrak{p})/\mathfrak{x}(A/\mathfrak{p}) \simeq A/\mathfrak{x} + \mathfrak{p}$ v.e.L.

Folgerung: $\dim \mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p} \leq r$ und $= r$ genau dann, wenn $e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \neq 0$.

b) $E_\mathfrak{p}/\mathfrak{y}E_\mathfrak{p}$ v.e.L.: Dies ist gleichbedeutend mit

$$A_\mathfrak{p}/\mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E_\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/(\mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E))_\mathfrak{p}$$

v.e.L., und letzteres ist äquivalent damit, daß $\mathfrak{p}$ minimales Primoberideal von $\mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E)$, also $\mathfrak{p}$ minimal assoziiert zu $E/\mathfrak{y}E$ ist.

Folgerung: $\dim E_{\mathfrak{p}} \leqq s$ und $= s$ genau dann, wenn $e^{A_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) \neq 0$.

2. Für $\dim E < r + s$ (nach Voraussetzung ist $\dim E \leqq r + s$) sind beide Seiten von (1) gleich 0. Dann ist nämlich $\dim(A/\mathrm{Ann}(E)) < r + s$ und folglich für $\dim \mathfrak{p} = r$ $\dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathrm{Ann}(E_{\mathfrak{p}})) = \dim E_{\mathfrak{p}} < s$, also

$$e^{A_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) = 0,$$

während für $\dim \mathfrak{p} < r$

$$e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) = 0$$

ist. Ist $\dim E = r + s$, so ist nach den Folgerungen unter 1. $\dim \mathfrak{p} + \dim E_{\mathfrak{p}} = \dim E$ äquivalent mit $\dim \mathfrak{p} = r$ und $\dim E_{\mathfrak{p}} = s$. Damit ist obige Aussage über die zweite Summationsbedingung bereits bewiesen.

3. Für $\dim E = r + s$ ist nach Übergang zu $A' = A/\mathrm{Ann}(E)$ das System der $r + s$ Elemente $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \subset \mathfrak{r}(A')$ ein Parametersystem für A' ($\dim A' = r + s$ und $A'/(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ ist v.e.L.).

Beweis von Satz 2. Zunächst ersetzen wir die nach den vorausgehenden Bemerkungen äquivalente Summationsbedingung „$\mathfrak{p}$ minimal assoziiert zu $E/\mathfrak{y}E$ und $\dim \mathfrak{p} = r$" durch die äquivalente Bedingung „$\mathfrak{p} \in V(E/\mathfrak{y}E)$ und $\dim \mathfrak{p} = r$": Da für $\mathfrak{p} \in V(E/\mathfrak{y}E)$ $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E)$ und wegen $(A/\mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E))/\mathfrak{x}(A/\mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E)) \cong$ $\cong A/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \mathrm{Ann}(E)$ v.e.L. $\dim(A/\mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E)) \leqq r$ ist, ist $\dim \mathfrak{p} = r$ gleichbedeutend mit der Eigenschaft von $\mathfrak{p}$, minimales Primoberideal von $\mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E)$ zu sein, also mit $\mathfrak{p}$ minimal assoziiert zu $E/\mathfrak{y}E$ und $\dim \mathfrak{p} = r$.

Wir definieren nun

$$f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in V(E/\mathfrak{y}E) \\ \dim \mathfrak{p} = r}} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x})\, e^{A_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) \tag{2}$$

und beweisen unsere Behauptung $e(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, indem wir zunächst einige Eigenschaften von $f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ nachweisen, die den Eigenschaften A)—C) von $e(E, \boldsymbol{x})$ entsprechen.

Hilfssatz A. *Ist*

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

exakt und $E/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})E$ v.e.L., so sind auch $E'/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})E'$ und $E''/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})E''$ v.e.L., und es ist

$$f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(E', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(E'', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Beweis. Wir bezeichnen die genauen Summationsbereiche in den Summen $f(E)$, $f(E')$ und $f(E'')$ mit S, S' und S''. Es ist mit

$$S = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E), \dim \mathfrak{p} = r, \dim E_{\mathfrak{p}} = s\},$$

$$S' = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E'), \dim \mathfrak{p} = r, \dim E_{\mathfrak{p}} = s\}$$

und

$$S'' = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{y} + \mathrm{Ann}(E''), \dim \mathfrak{p} = r, \dim E_{\mathfrak{p}} = s\}$$

$S', S'' \subset S$: Aus $\mathfrak{p} \in S'$ folgt $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{y} + \operatorname{Ann}(E') \supset \mathfrak{y} + \operatorname{Ann}(E)$, $\dim \mathfrak{p} = r$ und wegen $\dim E'_{\mathfrak{p}} = s$ auch $\dim E_{\mathfrak{p}} = s$, d. h. $\mathfrak{p} \in S$. Letzteres ergibt sich aus der Exaktheit von $0 \to E'_{\mathfrak{p}} \to E_{\mathfrak{p}} \to E''_{\mathfrak{p}} \to 0$, die $\dim E_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Max}(\dim E'_{\mathfrak{p}}, E''_{\mathfrak{p}})$ zur Folge hat. Diese Beziehung zeigt aber zugleich $S = S' \cup S''$: Ist nämlich für $\mathfrak{p} \in S$ etwa $\dim E'_{\mathfrak{p}} = s$, so ist $E'_{\mathfrak{p}} \neq \{0\}$ und folglich $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann}(E')$, also $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{y} + \operatorname{Ann}(E')$, d. h. $\mathfrak{p} \in S'$. Aus der Exaktheit von $0 \to E'_{\mathfrak{p}} \to E_{\mathfrak{p}} \to E''_{\mathfrak{p}} \to 0$ erhält man für $\mathfrak{p} \in S$ mit Eigenschaft A) von $e(E, \boldsymbol{x})$

$$e(E_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) = e(E'_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) + e(E''_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}).$$

Somit wird

$$f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{S} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot e^{A_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) = \sum_{S} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot (e(E'_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) + e(E''_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y})) =$$

$$= \sum_{S, \dim E'_{\mathfrak{p}} = s} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot e(E'_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) + \sum_{S, \dim E''_{\mathfrak{p}} = s} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot e(E''_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) = f(E', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(E'', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

da $S' = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in S, \dim E'_{\mathfrak{p}} = s\}$, $S'' = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in S, \dim E''_{\mathfrak{p}} = s\}$.

Hilfssatz B. $f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, *wenn* $\dim E < r + s$.

Beweis. Bemerkung 2.

Hilfssatz C. *Ist y_s Nichtnullteiler von E, so ist*

$$f^A(E, x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = f^{A/(y_s)}(E/y_s E, x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{s-1}),$$

ferner

$$f(E, x_1, \ldots, x_r, \varnothing) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in V(E) \\ \dim \mathfrak{p} = r}} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot l(E_{\mathfrak{p}}).$$

Beweis. Die letzte Beziehung ergibt sich unmittelbar aus der Definition (2) von $f(E, \boldsymbol{x}, \varnothing)$. In diesem Fall ist nämlich der zweite Faktor in der Summe $f(E, \boldsymbol{x}, \varnothing)$ gleich $e^{A_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, \varnothing) = l(E_{\mathfrak{p}})$ nach Eigenschaft C) in 1. Zur ersten Beziehung bemerken wir, daß für $\mathfrak{p} \in V(E/\mathfrak{y}E)$, also $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{y} + \operatorname{Ann}(E)$, und $\dim \mathfrak{p} = r$ y_s auch Nichtnullteiler von $E_{\mathfrak{p}}$ ist. Mit $\bar{A} = A/(y_s)$, $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/(y_s)$, $\bar{E} = E/y_s E$, $\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{s-1}$, $\bar{\mathfrak{y}} = (\bar{\boldsymbol{y}})$ gilt somit nach Eigenschaft C) aus Abschnitt 1

$$e^{A_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) = e^{A_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, y_1, \ldots, y_s) = e^{A_{\mathfrak{p}}/(y_s)}(E_{\mathfrak{p}}/y_s E_{\mathfrak{p}}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{s-1}) = e^{\bar{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}}(\bar{E}_{\mathfrak{p}}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{s-1}).$$

Ferner ist $e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) = e(\bar{A}/\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\boldsymbol{x}})$, da $\mathfrak{p} \supset (y_s)$, und die Mengen $\mathfrak{p} \in V(E/\mathfrak{y}E)$, $\dim \mathfrak{p} = r$ und $\bar{\mathfrak{p}} \in V(\bar{E}/\bar{\mathfrak{y}}\bar{E})$, $\dim \bar{\mathfrak{p}} = r$ sind kanonisch eineindeutig aufeinander bezogen. Nun ist

$$f^A(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in V(E/\mathfrak{y}E) \\ \dim \mathfrak{p} = r}} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot e^{A_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\substack{\bar{\mathfrak{p}} \in V(\bar{E}/\bar{\mathfrak{y}}\bar{E}) \\ \dim \bar{\mathfrak{p}} = r}} e(\bar{A}/\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}) \cdot e^{\bar{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}}(\bar{E}_{\mathfrak{p}}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{s-1}) =$$

$$= f^{\bar{A}}(\bar{E}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{s-1}) = f^{A/(y_s)}(E/y_s E, x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{s-1}).$$

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir $e(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ durch Induktion nach der Elementezahl s des Systems $\boldsymbol{y} = y_1, \ldots, y_s$: Für $s = 0$ folgt die Behauptung aus der zweiten Formel in Hilfssatz C und

$$e(E, \boldsymbol{x}) = \sum_{\dim \mathfrak{p} = r} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot l(E_\mathfrak{p}) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in V(E) \\ \dim \mathfrak{p} = r}} e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot l(E_\mathfrak{p})$$

(s. den Beweis von Satz 1).

Angenommen unsere Behauptung sei für alle Elementsysteme $\boldsymbol{y}$ der Länge $s - 1$ schon bewiesen. Dann ist nach Hilfssatz A und B wie im Beweis von Satz 1 für $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r, \boldsymbol{y} = y_1, \ldots, y_s$

$$f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\dim \mathfrak{p} = r+s} l(E_\mathfrak{p}) \cdot f(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Wir setzen nun $A/\mathfrak{p} = E'$. Es ist y_s Nichtnullteiler von E': Für $\mathfrak{p} \in V(E)$ ist, da $E/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) E$ v.e.L., $(A/\mathfrak{p})/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})(A/\mathfrak{p})$ v.e.L., also wegen $\dim A/\mathfrak{p} = r + s$ $x_1, \ldots, x_r, x_1, \ldots, y_s$ ein Parametersystem für $A/\mathfrak{p}$, d. h. sicher $y_s \notin \mathfrak{p}$, y_s also Nichtnullteiler von E'. Somit wird nach Hilfssatz C

$$\begin{aligned} f(E', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= f^{A/(y_s)}(E'/y_s E', x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{s-1}) = \\ &= e^{A/(y_s)}(E'/y_s E', x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots y_{s-1}) \end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Nach Eigenschaft C) von $e(E, \boldsymbol{x})$ ist aber der letzte Ausdruck gleich $e^A(E', x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$, insgesamt also

$$f(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Dies in obige Formel eingetragen ergibt

$$f(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\dim \mathfrak{p} = r+s} l(E_\mathfrak{p}) \cdot e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = e(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nach Definition unseres Symbols $e(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ergibt sich aus unserem Satz 2 die übliche *Assoziativformel für Parameterideale.*

Ist $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s \subset \mathfrak{r}(A)$, $\dim E = r + s$ und $E/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) E$ v.e.L., d. h. ist $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ ein *Parametersystem bezüglich* E, so gilt

$$e(E, \mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \sum e(A/\mathfrak{p}, \mathfrak{x}) \cdot e^{A_\mathfrak{p}}(E_\mathfrak{p}, \mathfrak{y}), \tag{3}$$

$\mathfrak{p}$ minimal assoziiert zu $E/\mathfrak{y} E$, $\dim \mathfrak{p} + \dim E_\mathfrak{p} = \dim E$, wo jetzt die Symbole $e(E, \mathfrak{x} + \mathfrak{y})$, $e(A/\mathfrak{p}, \mathfrak{x})$, $e^{A_\mathfrak{p}}(E_\mathfrak{p}, \mathfrak{y})$ die Multiplizitäten der Ideale $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezüglich der Moduln E, $A/\mathfrak{p}$, $E_\mathfrak{p}$ bedeuten. Hier ist im Gegensatz zu Satz 2 die zweite Summationsbedingung für die Richtigkeit der Formel (3) unentbehrlich.

Die Assoziativformel (3) gilt vermöge eines von NORTHCOTT und REES [7] angegebenen Reduktionsprozesses unter der *schwächeren Voraussetzung:*

$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ sind Ideale $\subset \mathfrak{r}(A)$, die *analytisch disjunkt bezüglich* E sind, und es ist $E/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ v.e.L. Vergleiche dazu [7] und [3]. An die Stelle des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ dort hat hier das Radikal $\mathfrak{r}(A)$ zu treten.

3. Die Lechsche Formel. Mit Hilfe unserer Assoziativformel (1) beweisen wir nun

Satz 3 *(Lechsche Formel). Ist $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r \subset \mathfrak{r}(A)$ und $E/\mathfrak{x}E$ v.e.L., so gilt*

$$e(E, \boldsymbol{x}) = \lim_{n_i \to \infty} \frac{1}{n_1 \cdots n_r} \cdot l(E/(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}) E), \tag{4}$$

wo unter $\lim\limits_{n_i \to \infty}$ *der iterierte Limes* $\lim\limits_{n_1 \to \infty} (\lim\limits_{n_2 \to \infty} (\ldots (\lim\limits_{n_r \to \infty} \ldots) \ldots))$ *unabhängig von der Reihenfolge verstanden werde.*

Bemerkung. Bei LECH [5] wird die Existenz des Limes $\lim\limits_{\mathrm{Min}\, n_i \to \infty}$ bewiesen. Dies ist eine schärfere Aussage als die Existenz des iterierten Limes, die wir beweisen. Für die Anwendung genügt aber stets die letztere.

Beweis von Satz 3. Wir beweisen (4) durch Induktion nach der Länge des Elementsystems $\boldsymbol{x}$. Für die Länge 1, also $\boldsymbol{x} = x$, folgt unmittelbar aus den Definitionen $e(E, x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot l(E/(x^n)E)$. Unsere Behauptung sei nun schon für alle Elementsysteme der Länge s bewiesen. Wir beweisen sie für das Elementsystem $x, y_1, \ldots, y_s$ der Länge $s + 1$: Nach der Assoziativformel (1) ist

$$e(E, x, y_1, \ldots, y_s) = \sum e(A/\mathfrak{p}, x) \cdot e(E_\mathfrak{p}, \boldsymbol{y}), \quad \mathfrak{p} \text{ minimal assoziiert zu } E/(\boldsymbol{y})E,$$

und nach Induktionsvoraussetzung

$$e(E_\mathfrak{p}, \boldsymbol{y}) = \lim_{n_i \to \infty} \frac{1}{n_1 \cdots n_s} \cdot l(E_\mathfrak{p}/(y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s}) E_\mathfrak{p}),$$

also

$$e(E, x, y_1, \ldots, y_s) = \lim_{n_i \to \infty} \frac{1}{n_1 \cdots n_s} \cdot \sum e(A/\mathfrak{p}, x) \cdot l(E_\mathfrak{p}/(y_1^{n_1}, \ldots y_s^{n_s}) E_\mathfrak{p}),$$
$$\mathfrak{p} \text{ minimal assoziiert zu } E/(\boldsymbol{y})E.$$

Nun stimmen die zu $E/(\boldsymbol{y})E$ minimal assoziierten Primideale, die minimalen Primoberideale von $(\boldsymbol{y}) + \mathrm{Ann}(E)$, mit den zu $E/(y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s})E$ minimal assoziierten Primidealen, den minimalen Primoberidealen von $(y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s}) + \mathrm{Ann}(E)$, überein. Die obige Summe wird somit gleich

$$\sum e(A/\mathfrak{p}, x) \cdot l((E/(y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s}) E)_\mathfrak{p}) = e(E/(y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s}) E, x)$$

(Assoziativformel für den Modul $E/(y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s})E$ und das Elementsystem x, $\varnothing$), d. h. es ist

$$\begin{aligned} e(E, x, y_1, \ldots, y_s) &= \lim_{n_i \to \infty} \frac{1}{n_1 \cdots n_s} \cdot e(E/(y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s}) E, x) = \\ &= \lim_{n_i \to \infty} \frac{1}{n_1 \cdots n_s} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot l(E/(x^n, y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s}) E) = \\ &= \lim_{n_i \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\, n_1 \cdots n_s} \cdot l(E/(x^n, y_1^{n_1}, \ldots, y_s^{n_s}) E) \qquad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Da $e(E, \boldsymbol{x})$ nicht von der Reihenfolge der Elemente in $\boldsymbol{x}$ abhängt, sind die iterierten Limites unabhängig von der Reihenfolge stets dieselben.

Umgekehrt liefert auch unser Satz 3 wie in [5] die Assoziativformel (1).

Ebenso einfach ergibt sich aus unserer Assoziativformel (1) der

Satz 4. *Ist* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = x_1, \ldots, x_r, y_1 \ldots y_s \subset \mathfrak{r}(A)$ *und* $E/(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})E$ *v.e.L., so gilt*

$$e(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{m,n \to \infty} \frac{r!\,s!}{m^r n^s} \cdot l(E/\mathfrak{x}^m E + \mathfrak{y}^n E), \tag{5}$$

wo $\lim\limits_{m,n\to\infty}$ *wieder als iterierter Limes aufzufassen ist.*

Beweis. Nach (1) ist

$$e(E, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot e(E_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{y}), \quad \mathfrak{p} \text{ minimal assoziiert zu } E/\mathfrak{y}E.$$

Somit wird

$$e(E, x, y) = \sum e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{s!}{n^s} \cdot l(E_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{y}^n E) = \lim_{n\to\infty} \frac{s!}{n^s} \cdot \sum e(A/\mathfrak{p}, \boldsymbol{x}) \cdot l((E/\mathfrak{y}^n E)),$$

$$\mathfrak{p} \text{ minimal assoziiert zu } E/\mathfrak{y}^n E,$$

also

$$e(E, x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{s!}{n^s} \cdot e(E/\mathfrak{y}^n E, \boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{s!}{n^s} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{r!}{m^r} \cdot l(E/\mathfrak{x}^m E + \mathfrak{y}^n E) \quad \text{w.z.b.w}$$

Zusatz. Entsprechend den Bemerkungen am Ende von 2. gilt (5) auch unter den dort angegebenen schwächeren Voraussetzungen.

Anwendung auf die Berechnung der Multiplizität in Tensorprodukten und vollständigen Tensorprodukten: In [4] wird die Lechsche Formel auf die Berechnung der Multiplizität von Idealen in lokalisierten Tensorprodukten lokaler Ringe angewandt. Dasselbe liefert natürlich auch die Lechsche Formel in unserer Fassung. Entsprechendes gilt für Moduln und vollständige Tensorprodukte.

Literaturverzeichnis

[1] M. Auslander and A. Buchsbaum, Codimension and multiplicity. Ann. of Math. **68**, 625–657 (1958).

[2] C. Chevalley, Intersection of algebraic and algebroid varieties. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 1–85 (1945).

[3] W. Habicht, Die Assoziativformel für Parameterideale und -moduln. Arbeitsgemeinschaft über Stellenringe und Schnittmultiplizität in der algebraischen Geometrie, Oberwolfach 1958 (vervielfältigt).

[4] W. Jehne, Der Produktsatz für Multiplizitäten. Arbeitsgemeinschaft über Stellenringe und Schnittmultiplizität in der algebraischen Geometrie, Oberwolfach 1958 (vervielfältigt).

[5] Ch. Lech, On the associativity formula for multiplicities. Ark. Mat. **3**, 301–314 (1958).

[6] M. Nagata, The theory of multiplicity in general local rings. Proc. of the International Symposium on Algebraic Number theory, Tokyo & Nikko, 1955, S. 175–189.

[7] D. G. Northcott and D. Rees, Reduction of ideals in local rings. Proc. Cambridge Philos. Soc. **50**, 145–158 (1954).

[8] P. Samuel, Algèbre locale. Paris 1953.

[9] J. P. Serre, Multiplicities d'intersection. Cours au College de France 1957–1958 (vervielfältigt).

Eingegangen am 17. 11. 1960

Anschrift des Autors:

Hans-Joachim Nastold
Mathematisches Institut des Universität
Heidelberg, Tiergartenstraße

Über die Zentralindices der Ableitungen einer ganzen transzendenten Funktion

Von

RUDOLF GORENFLO

0. Die Funktion $g(z) = \sum\limits_0^\infty a_j z^j$ sei ganz transzendent, und mit $|z| = r$ bezeichne $m(r, g)$ das Maximalglied, $\nu(r)$ den Zentralindex von g, $\nu_n(r)$ den Zentralindex von $g^{(n)}$, $n \geqq 1$. Dann gilt, wie durch Induktion leicht zu sehen, $\nu(r) - n \leqq \nu_n(r)$, und zwar scharf in dem Sinne, daß es Funktionen g gibt, für die nicht überall das Zeichen $<$ gilt. Wesentlich schwieriger ist es, ν_n nach oben abzuschätzen. Für eine durch g bestimmte Menge gegen ∞ strebender Werte r gilt

(0) $$\nu_n(r) \leqq (1 + \delta_n(r))\, \nu(r), \quad n \geqq 1, \quad \delta_n(r) \to 0.$$

So gilt[1]) nach WITTICH

$$\delta_n(r) = O_n(\nu^{-\frac{1}{4}+\delta}(r))$$

mit beliebig kleinem $\delta > 0$, nach CLUNIE

$$\delta_n(r) < 2n\nu^{-1}(r)\log^2\nu(r) \quad \text{für} \quad 1 \leqq n \lesssim (1-\varepsilon)\frac{\nu(r)}{\log\nu(r)}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Diese Resultate sind mittels der Wiman-Vallronschen Vergleichsmethode gewonnen. Arbeitet man — anders als in bisherigen Untersuchungen — statt mit einer speziellen mit einer möglichst allgemein gehaltenen Vergleichsfunktion, so kann man (0) verschärfen und präzisieren[2]). Dies ist das Thema dieser Arbeit.

1. Zunächst[3]) werde die *Vergleichsfunktion* $F(\varrho)$ betrachtet. Mit einer ganzen Zahl $N \geqq 0$ sei

(1) $$F(\varrho) = \sum_{j=N}^{\infty} b_j \varrho^j, \quad b_N > 0, \quad b_j = b_N \cdot \left(\prod_{k=N+1}^{j} P_k\right)^{-1}$$

$$\text{für} \quad j \geqq N+1, \quad P_N = 0 < P_{N+1} < P_{N+2} < \cdots \to P \leqq \infty,$$

also $\nu(\varrho, F) = j$ genau in $P_j \leqq \varrho < P_{j+1}$ für $j \geqq N$.

(2) $$0 < \varphi(j) = \log^{-1}\left(\frac{P_j}{P_{j-1}}\right) < \infty \quad \text{für} \quad j \geqq N+2,$$

---

1) Vgl. [5], S. 10, und [1], S. 39ff.
2) Vgl. die Andeutung in [2], S. 84f.
3) Vgl. [2], § 1 (S. 8—10).

also

$$\log P_j = \log P_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{j} \varphi^{-1}(k) \quad \text{für} \quad j \geqq N+1 .$$

Die Folge $\varphi(j)$ lasse sich für $x \geqq N+2$ zu einer Funktion $\varphi(x)$ mit folgenden Wachstumseigenschaften[4]) interpolieren:

(a) $\varphi(x) > 0$ für $x \geqq N+2$.

(b) Für hinreichend große x wachse $\varphi(x)$ monoton.

(d) Es sei

$$\varphi(x) = O\left(\frac{x^2}{\log x}\right)$$

bei $x \to \infty$, und für hinreichend große x wachse $\dfrac{x^2}{\varphi(x)\log x}$ monoton.

(g) Bei $x \to \infty$ sei $\varphi(x + o(x)) \sim \varphi(x)$.

(h) Für hinreichend große x sei $\varphi(2x) \leqq 4\varphi(x)$.

(i) Es existiere

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} .$$

Bezüglich (i) unterscheiden wir die 3 Fälle

$$(\alpha)\quad \lambda = \infty, \quad (\beta)\quad 0 < \lambda < \infty, \quad (\gamma)\quad \lambda = 0 .$$

2. Es sei $\nu(\varrho, F) = \nu$, $\nu(\varrho, F^{(n)}) = \nu_n$ gesetzt, und ϱ liege stets in einer hinreichend kleinen linksseitigen Umgebung von P. *ν sei also stets hinreichend groß.* Alle asymptotischen Aussagen beziehen sich auf $\varrho \to P - 0$, also auf $\nu \to \infty$.

Nach diesen Vorbereitungen bemerken wir, daß in $P_\nu \leqq \varrho < P_{\nu+1}$ sicher $\nu_n < \mu - n$ ist, wenn[5])

$$\frac{j(j-1)\cdots(j-n+1)\, b_j\, \varrho^{j-n}}{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\, b_\nu\, \varrho^{\nu-n}} < 1 \quad \text{für } j \geqq \mu . \tag{3}$$

Es ist nämlich

$$m(\varrho, F^{(n)}) \geqq \nu \cdots (\nu - n + 1)\, b_\nu\, \varrho^{\nu-n} .$$

Da wegen $\nu - n \leqq \nu_n$ sicher $\mu \geqq \nu + 1$ ist, gilt (3) erst recht, wenn sogar

$$\frac{b_j}{b_\nu}\left(\frac{j}{\nu-n+1}\right)^n P_{\nu+1}^{j-\nu} \leqq 1 \qquad \text{für } j \geqq \mu,\ \mu \text{ passend}, \tag{3'}$$

wegen (1), (2), (b) also erst recht, wenn, $j = \nu + p$ gesetzt,

$$A = \log \frac{\nu+p}{\nu-n+1} \leqq \frac{(p-1)p}{2n\,\varphi(\nu+p)} = B \qquad \text{für } p \geqq \mu - \nu . \tag{4}$$

---

[4]) Die Benennung dieser Eigenschaften ist in Analogie zu [2], S. 9, durchgeführt. Von besonderem Interesse sind Funktionen $\varphi(x) \sim \psi(x)$ mit im Sinne von [3], S. 17, logarithmisch-exponentieller Funktion $\psi(x)$, deren Wachstum zwischen 1 und $x^2/\log x$ liegt.

[5]) Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des in [1], S. 39ff., für spezielle Vergleichsfunktionen angewandten Verfahrens.

Logarithmieren der linken Seite von (3′) gibt nämlich

$$n \log \frac{\nu + p}{\nu - n + 1} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{k}{\varphi(\nu + p - k + 1)}.$$

Unser Ziel ist die asymptotische Bestimmung einer Folge $p_0 = p_0(\nu) = \mu - \nu \geqq 1$, mit der (4) für $p \geqq p_0$ gilt. Mit dieser ist

$$\nu_n < \nu + p_0(\nu) - n. \tag{5}$$

Für die Fälle (α) und (β) setzen wir voraus

$$1 \leqq n \leqq \frac{c\nu^2}{\varphi(\nu)\log \nu}, \quad 0 < c < \frac{1}{8}, \tag{6}$$

für den Fall (γ) der Einfachheit halber

$$1 \leqq n \leqq \eta(\nu)\left(\frac{\nu}{\varphi(\nu)}\right)^{1/2}, \quad 0 < \eta(\nu) \to 0 \text{ beliebig langsam.} \tag{6_γ}$$

Mit (6_γ) gilt um so mehr (6), und in allen 3 Fällen ist

$$1 \leqq n \leqq h(\nu) = o(\nu). \tag{6′}$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Hilfssatz. *Es existiert eine monoton gegen* 0 *fallende Folge* $\varepsilon(\nu)$, *mit der* (4) *für* $p \geqq \geqq \varepsilon(\nu)\nu$ *gilt.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es zu jedem ε, $0 < \varepsilon < 1$, ein ν_ε gibt, mit dem (4) für $\nu \geqq \nu_\varepsilon$, $p \geqq \varepsilon\nu$ gilt. Wir verwenden (6), (6′), (b), (d), (h). Für $p \geqq \nu$ ist $\nu + p \leqq 2p$, also $A < \log(2p)$, andererseits

$$B \geqq \frac{\log p}{(8 + o(1))c} > \log(2p).$$

Für $\varepsilon\nu \leqq p \leqq \nu$ ist $\nu + p \leqq 2\nu$, also $A < \log 3$, andererseits

$$B \geqq \frac{\varepsilon^2 \log \nu}{9c} > \log 3.$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Nach dem Hilfssatz genügt es, (4) zu befriedigen unter der Beschränkung

$$1 \leqq p_0 \leqq p < \varepsilon(\nu)\nu, \quad 0 < \varepsilon(\nu) \to 0. \tag{7}$$

Zur Erleichterung der Schreibweise bezeichne $E_j = E_j(\nu)$ eine jeweils passende Funktion mit $E_j(\nu) \to 1$. Wegen

$$B \geqq \frac{p^2 - p}{2nE_1\varphi(\nu)} = B^*$$

(man beachte (b) und (g)) und

$$A = \log\left(1 + \frac{p}{\nu}\right) - \log\left(1 - \frac{n-1}{\nu}\right) < \frac{p}{\nu} + \frac{n-1}{\nu}E_2 = A^*$$

(man beachte (6′)) gilt (4) sicher, wenn mit (7) sogar

(8) $$Q(p) = p^2 - \left(1 + 2nE_1\frac{\varphi(\nu)}{\nu}\right)p - 2E_1E_2(n-1)n\frac{\varphi(\nu)}{\nu} \geqq 0\,.$$

Diese in p quadratische Ungleichung folgt aus $A^* \leqq B^*$.

Aus (8) folgt, daß man unter (α) $p_0 = E_3 2n\frac{\varphi(\nu)}{\nu}$, unter ($\beta$) $p_0 = n(2E_4\lambda + 1)$ nehmen kann. Unter (α) allgemein, unter (β) für $n = 1$ erhält man dies durch Bestimmen der größten Nullstelle von $Q(p)$, unter (β) für $n \geqq 2$ ist $Q(p) > E_5n^2 - - E_6n > 0$ in $p \geqq p_0$. Mit (5) ergibt sich so[6])

(9) $$\nu_n < \nu + (2 + \delta(\nu))\,n\frac{\varphi(\nu)}{\nu}, \quad \delta(\nu) \to 0,$$

mit von n unabhängigem $\delta(\nu)$.

Unter (γ) ist wegen (7) mögliche Lösung $p_0 = \max(1, p^*)$, wenn $p = p^*$ größte Nullstelle von $Q(p)$ ist. Man findet mit (6_γ) $p_0 = E_6$, also mit (5), da ν_n ganzzahlig ist,

(10) $$\nu_n \leqq \nu + 1 - n \text{ für } \nu \geqq \nu_0\,.$$

Hierin ist ν_0 von n unabhängig.

Als Ergebnis notieren wir

Satz 1. *Hat $F(\varrho)$ die in* **1.** *angegebenen Eigenschaften, so gilt bei $\varrho \to P - 0$ in den Fällen* (α), (β) *unter der Voraussetzung* (6) *die Abschätzung* (9), *im Falle* (γ) *unter der Voraussetzung* (6_γ) *die Abschätzung* (10). *Beide Abschätzungen gelten gleichmäßig*[7]) *für die jeweils zugelassenen Werte n.*

3. *Die Funktion $g(z) = \sum\limits_0^\infty a_j z^j$ sei ganz transzendent.*

Wir benötigen einige in [2], § 8 bis § 11, hergeleitete Resultate[8]), die hier zusammengestellt seien. $F(\varrho)$ hat den Konvergenzradius P und ist im Falle $P = \infty$ ganz transzendent von der Ordnung $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$. Im Falle $P < \infty$ ist jede beliebige Funktion g mit F vergleichbar, im Falle $P = \infty$ jede Funktion g, die hinreichend stark langsamer anwächst als F (hierfür reicht hin, daß g von kleinerer Ordnung als F ist). g sei mit F vergleichbar, $\mathfrak{A}$ sei die Ausnahmemenge, $\mathfrak{B}$ die Vergleichsmenge. $\mathfrak{B}$ umfaßt entweder alle hinreichend großen Werte r oder eine abzählbare Menge gegen $r = \infty$ sich häufender Intervalle. Im Falle $P < \infty$ ist $\mathfrak{A}$ von endlichem logarithmischem Maße.

r liege in $\mathfrak{B}$ und strebe, Ausnahmeintervalle überspringend, gegen ∞. Nach der Saxerschen Form der Wiman-Valironschen Vergleichsmethode[9]) ist mit $\nu = \nu(r, g)$ und passendem $\varrho = \varrho(r)$ auch $\nu = \nu(\varrho, F)$ und

$$\frac{j\cdots(j-n+1)\,|a_j|\,r^{j-n}}{\nu\cdots(\nu-n+1)\,|a_\nu|\,r^{\nu-n}} \leqq \frac{j\cdots(j-n+1)\,b_j\,\varrho^{j-n}}{\nu\cdots(\nu-n+1)\,b_\nu\,\varrho^{\nu-n}}.$$

---

[6]) Unter (β) für $n \geqq 2$ ist (9) bezüglich (8) nicht scharf. Die scharfe Abschätzung ist sehr unhandlich.

[7]) in dem Sinne, daß in (9) $\delta(\nu)$, in (10) ν_0 nicht von n abhängt.

[8]) speziell [2], S. 33, Satz 9, und S. 43f. Die benötigten Resultate gelten, wie ein Durchlesen ihrer Beweise lehrt, auch noch unter den hier in **1.** gegen [2], S. 9, reduzierten Voraussetzungen über $\varphi(x)$.

[9]) Vgl. [4], S. 210ff., [1], S. 40f., [2], S. 40.

Ist für $j \geqq \mu$ die rechte Seite dieser Ungleichung < 1, so ist es um so mehr auch ihre linke Seite, und wegen

$$m(r, g^{(n)}) \geqq \nu \cdots (\nu - n + 1) \, |a_\nu| \, r^{\nu - n}$$

ist dann $\nu(r, g^{(n)}) < \mu - n$. Nach **2.** (Satz 1 und seiner Herleitung) gilt also

Satz 2. *F genüge den in* **1.** *angegebenen Voraussetzungen, die ganze transzendente Funktion g sei mit F vergleichbar; weiter sei jetzt aber $\nu = \nu(r, g)$, $\nu_n = \nu(r, g^{(n)})$, $r \in \mathfrak{V}$, $r \to \infty$. Dann gilt in den Fällen* (α), (β) *unter der Voraussetzung* (6) *die Abschätzung* (9), *im Falle* (γ) *unter der Voraussetzung* (6_γ) *die Abschätzung* (10). *Beide Abschätzungen gelten gleichmäßig für die jeweils zugelassenen Werte n.*

Mit $\varphi(x) \sim x \log^2 x$ und $\varphi(x) \sim x/\alpha$, $0 < \alpha < \infty$, erhält man die in [1], Theorem 6 und Theorem 7, angegebenen speziellen Resultate, bezüglich der zugelassenen Werte n etwas schwächer. Abschätzungen von ν_n für beliebige Funktionen g erhält man mit Funktionen φ, für die $\sum\limits_{N+2}^{\infty} \frac{1}{\varphi(j)} < \infty$; diese gelten außerhalb einer r-Ausnahmemenge endlichen logarithmischen Maßes[10]). Beispiele sind

$$\varphi(x) \sim x^{1+\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1\,; \quad \varphi(x) \sim x \left(\prod_{1}^{q-1} \log_j x \right) \log_q^{1+\varepsilon} x, \quad q \geqq 1, \quad \varepsilon > 0 .$$

Mit $\varphi(x) \sim x \log_j x$, $j \geqq 1$, erhält man Abschätzungen der Gestalt (9) für beliebige Funktionen g endlicher Ordnung; bezeichnet $L(s)$ das logarithmische Maß des in $0 \leqq r \leqq s$ liegenden Teiles der Ausnahmemenge, so ist $L(r) = o(\log r)$ bei $r \to \infty$[11]).

Literaturverzeichnis

[1] J. Clunie, On the determination of an integral function from its Taylor series. J. London Math. Soc. **30**, 32–42 (1955).

[2] R. Gorenflo, Über die Wiman-Valironsche Potenzreihenvergleichsmethode und ihre Anwendung in der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Dissertation Technische Hochschule Karlsruhe 1960.

[3] G. H. Hardy, Orders of infinity. Cambridge University Press 1954.

[4] W. Saxer, Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten. Math. Z. **17**, 206–227 (1923).

[5] H. Wittich, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Seite 4–11. Springer-Verlag 1955.

Eingegangen am 1. 12. 1960

Anschrift des Autors:

Rudolf Gorenflo
Mathematisches Institut
der Technischen Hochschule
Karlsruhe

---

[10]) Beweis in [4], S. 213ff., vgl. auch [2], S. 46, [5], S. 6f.

[11]) Beweis in [2], S. 47f.

Eine Beziehung zwischen Lösungen adjungierter Randwertprobleme bei elliptischen Differentialgleichungssystemen[1])

Von

JOACHIM JAENICKE

Wir betrachten folgendes Randwertproblem **A**: Gesucht sind zwei Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$, die in einem Gebiet $\mathfrak{F}$ Lösungen eines linearen elliptischen Differentialgleichungssystems

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_x - v_y &= a(x, y)\, u + b(x, y)\, v + c(x, y), \\ u_y + v_x &= \bar{a}(x, y)\, u + \bar{b}(x, y)\, v + \bar{c}(x, y) \end{aligned}$$

sind und auf dem Rand $\mathfrak{R}$ die Randbedingung

$$(2) \qquad \alpha(s)\, u + \beta(s)\, v = f(s)$$

erfüllen.

Wir machen folgende Annahmen:

1. $\mathfrak{F}$ sei einfach zusammenhängend,
2. $\mathfrak{R}$ sei stetig gekrümmt,
3. $a(x, y), \ldots, \bar{c}(x, y)$ seien H-stetig in $\mathfrak{F}$,
4. $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$,
5. $\alpha(s)$, $\beta(s)$ seien H-stetig differenzierbar; dabei bezeichnet s die Bogenlänge auf $\mathfrak{R}$.

Es sei aber erwähnt, daß man dieses Problem auch behandeln kann für mehrfach zusammenhängende Gebiete und in Fällen, in denen die anderen Voraussetzungen verletzt sind [8], [5], [6].

Mit dem Problem **A** ist nach W. HAACK [2], [3], [4] gleichzeitig ein *adjungiertes* Randwertproblem **A*** gegeben: Gesucht sind zwei Funktionen $W(x, y)$, $Z(x, y)$, die in $\mathfrak{F}$ Lösungen des elliptischen Systems

$$(3) \qquad \begin{aligned} W_x - Z_y &= -b\, W - b Z, \\ W_y + Z_x &= -\bar{a}\, W - a Z \end{aligned}$$

sind und auf $\mathfrak{R}$ die Randbedingung

$$(4) \qquad \gamma(s)\, W + \delta(s) Z = 0$$

erfüllen mit

$$(5) \qquad \mathfrak{c}(\mathfrak{R}) \equiv \{\delta(s), \gamma(s)\} = \left\{\alpha \frac{dx}{ds} - \beta \frac{dy}{ds}, \alpha \frac{dy}{ds} + \beta \frac{dx}{ds}\right\}.$$

---

[1]) Vorgetragen am 13. 9. 1960 auf dem 5. Österreichischen Mathematikerkongreß in Innsbruck.

Die Lösungsverhältnisse des Randwertproblems **A** werden durch die Charakteristik n der Randbedingung (2) bestimmt; das ist eine ganze Zahl, und zwar die Anzahl der Umdrehungen des Randvektors

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{R}) \equiv \{\beta(s), \alpha(s)\}$$

beim einmaligen positiven Umlauf um $\mathfrak{R}$; diese Umdrehungen zählen negativ, wenn sich $\mathfrak{a}(\mathfrak{R})$ entgegengesetzt zur Tangente von $\mathfrak{R}$ dreht.

Nach den Existenzsätzen von W. Haack [4], I. N. Vekua [8] und Joh. Nitsche [7] ist das Randwertproblem **A** im Falle $n \leqq 0$ unbeschränkt lösbar; dagegen existiert im Falle $n > 0$ genau dann eine stetige Lösung, wenn c, $\bar{c}$ und $f(s)$ Integralbedingungen genügen.

Will man diese Lösbarkeitsbedingungen aufstellen, so braucht man dazu die explizite Kenntnis der Lösungen des adjungierten Randwertproblems **A***[2]).

Da die Bestimmung von Lösungen dieser Probleme mit elementaren Methoden im allgemeinen nicht möglich ist, wollen wir untersuchen, ob man nicht die Lösungen des adjungierten Problems elementar aus den Lösungen des homogenen Problems **A**, also $\mathbf{A}_h$, ($c \equiv \bar{c} \equiv 0$, $f(s) \equiv 0$) berechnen kann. Dann würde es in einem Anwendungsfall genügen, daß man die Lösungen des Randwertproblems $\mathbf{A}_h$ kennt.

Die Charakteristik des adjungierten Problems **A*** ist bekanntlich

$$-n+1.$$

Wegen $n > 0$ ist das eine Zahl $\leqq 0$. Nach W. Haack [4] haben die Lösungsfunktionen W, Z des adjungierten Problems $|-n+1| = n-1$ gemeinsame Nullstellen erster Ordnung im Innern des Gebietes bzw. weniger mehrfache oder Randnullstellen [6]. — Die Lösung W, Z ist durch diese vorgebbare Nullstellenverteilung bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Wir leiten eine Relation ab, der diese Lösung W, Z genügen muß.

Für u, v benutzen wir folgende Funktion: Eine Lösung des Problems $\mathbf{A}_h$, die in den vorgegebenen (W, Z)-Nullstellen Polstellen entsprechender Ordnung und in einem variablen inneren Punkt (ξ, η) einen Pol erster Ordnung hat.

Eine solche Lösung $u(x, y; \xi, \eta)$, $v(x, y; \xi, \eta)$ existiert nach den bekannten Existenzsätzen und ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Nach W. Haack [2], [3] gilt nun über jedes Gebiet, in welchem u, v stetig differenzierbare Lösungen des homogenen Gleichungssystems ($c \equiv \bar{c} \equiv 0$) aus Problem **A** und W, Z stetig differenzierbare Lösungen des adjungierten Differentialgleichungssystems (3) sind, der Integralsatz

$$\oint (-Wu + Zv)\,dx + (Zu + Wv)\,dy = 0.$$

---

[2]) Kürzlich gab I. N. Vekua neue Bedingungen für die Existenz einer stetigen Lösung des Randwertproblems positiver Charakteristik an [9], die nicht die Lösungen des adjungierten Problems benutzen. Jedoch wird dabei eine Lösung mit Polstellen des inhomogenen Problems **A** benutzt, die von c, $\bar{c}$ und $f(s)$ abhängt. Das Randwertproblem **A** muß also (mit Polstellenvorgaben) neu gelöst werden, wenn man die inhomogenen Glieder abändert. Auf diesen Umstand machte mich mein Lehrer, Herr W. Haack, aufmerksam und gab mir die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung.

Wenn wir diesen Integralsatz über unser Gebiet $\mathfrak{F}$ anwenden wollen, so müssen wir die Punkte, in denen u, v Pole haben, in bekannter Weise herausschneiden und durch Grenzwerte auswerten. Dabei gilt sofort folgendes: In allen Polstellen von u, v, außer in der Polstelle (ξ, η), haben W, Z entsprechende Nullstellen, so daß die zugehörigen Randintegrale alle einzeln im Grenzwert gegen Null konvergieren. Es bleibt das Randintegral über einen Kreis $\mathfrak{k}$ vom Radius ϱ um den Punkt (ξ, η) zu untersuchen:

$$-\oint_{\mathfrak{k}} (-Wu + Zv)\,dx + (Zu + Wv)\,dy\,.$$

Nach dem Ähnlichkeitsprinzip von L. Bers [1] gilt, wenn man u, v als komplexe Funktion $u + iv$ schreibt, daß in einer Umgebung des Punktes $\zeta = \xi + i\eta$ in dem Ausdruck

$$u + iv = \frac{R + iI}{z - \zeta} \quad (z = x + iy)$$

R und I stetige Funktionen sind mit $R^2 + I^2 \neq 0$. Es ist

$$R = (x - \xi)\,u - (y - \eta)\,v, \quad I = (x - \xi)\,v + (y - \eta)\,u\,.$$

Hierdurch kommt man auf die Darstellung

$$u = \frac{(x-\xi)\;R + (y-\eta)\;I}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,, \quad v = \frac{(x-\xi)\;I - (y-\eta)\;R}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,.$$

Auf $\mathfrak{k}$ ist

$$x - \xi = \varrho\cos\vartheta, \quad y - \eta = \varrho\sin\vartheta; \quad 0 < \vartheta \leqq 2\pi\,.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} -\oint_{\mathfrak{k}} = &-\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \{[-W(R\cos\vartheta + I\sin\vartheta) + Z(I\cos\vartheta - R\sin\vartheta)]\,[-\sin\vartheta] + \\ &+ [Z(R\cos\vartheta + I\sin\vartheta) + W(I\cos\vartheta - R\sin\vartheta)]\cos\vartheta\}\,d\vartheta \\ = &-\int_{0}^{2\pi} \{WI + ZR\}\,d\vartheta\,. \end{aligned}$$

Das gibt für $\varrho \to 0$

$$-2\pi \lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} \{WI + ZR\}\,.$$

Der Integrand des Integrals über $\mathfrak{R}$ ist

$$\left(-W\frac{dx}{ds} + Z\frac{dy}{ds}\right)u + \left(Z\frac{dx}{ds} + W\frac{dy}{ds}\right)v\,.$$

Gemäß der Randeigenschaft $\gamma W + \delta Z = 0$ ist dieser (u, v)-Ausdruck linear abhängig von dem Ausdruck

$$\alpha u + \beta v\,.$$

Da dieser Ausdruck auf $\mathfrak{R}$ Null ist, verschwindet das Integral über $\mathfrak{R}$. Somit erhalten wir die *lineare homogene Beziehung*

$$W(\xi,\eta)\cdot \lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} \{(x-\xi)\,v + (y-\eta)\,u\} + Z(\xi,\eta)\cdot \lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} \{(x-\xi)\,u - (y-\eta)\,v\} = 0\,.$$

Da $R^2(\xi, \eta; \xi, \eta) + I^2(\xi, \eta; \xi, \eta) \neq 0$ ist, kann man mit dieser Relation eine der gesuchten Funktionen im System (3) eliminieren. Das führt auf zwei lineare homogene Differentialgleichungen für W (bzw. für Z), die integrabel sind, da nach dem oben Gesagten eine Lösung W, Z existiert und diese auch dem gefundenen linearen homogenen System genügen muß. Durch Quadratur gewinnt man W (bzw. Z) bis auf einen konstanten Faktor; die andere Funktion ist dann aus der linearen Beziehung berechenbar.

Damit ist gezeigt: Aus einer Lösung u, v des *homogenen* Problems **A** (also $\mathbf{A}_h$) mit $n > 0$, die $n - 1$ gegebene Polstellen und eine variable Polstelle (ξ, η) hat, läßt sich elementar eine Lösung W, Z des adjungierten Problems $\mathbf{A}^*$ berechnen, die $n - 1$ Nullstellen (in den gegebenen Polstellen von u, v) hat. — Die allgemeine Lösung des adjungierten Problems erhält man durch Veränderung der $n - 1$ gegebenen Polstellen von u, v.

Zur Aufstellung der von W. Haack [4] bzw. I. N. Vekua [8] angegebenen Lösbarkeitsbedingungen des *inhomogenen* Randwertproblems **A** positiver Charakteristik n hat man demnach aus den Lösungen des homogenen Problems **A**, die wir als bekannt annehmen, nach dem angegebenen Weg, also allein durch Quadraturen und Elimination, die Lösungen des adjungierten Problems $\mathbf{A}^*$ zu berechnen und kann dann die Integralrelationen (also die Lösbarkeitsbedingungen) aller inhomogenen Probleme, d. h. für beliebige c, $\bar{c}$ und $f(s)$, geschlossen angeben.

Literaturverzeichnis

[1] L. Bers, Function-theoretical properties of solutions of partial differential equations of elliptic type. Contributions to the theory of partial differential equations. Ann. Math. Stud. **33**, 69—94 (1954).

[2] W. Haack und G. Hellwig, Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf Fredholmsche Integralgleichungen, I. Math. Nachr. **4**,408—418 (1950/51).

[3] W. Haack, Allgemeine Randwertprobleme für Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Nachr. **7**, 1—30 (1952).

[4] W. Haack, Randwertprobleme höherer Charakteristik für ein System von zwei elliptischen Differentialgleichungen. Math. Nachr. **8**, 123—132 (1952).

[5] J. Jaenicke, Über lineare Randwertprobleme der Systeme von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus. Diss. Berlin 1957.

[6] J. Jaenicke, Nullstellenvorgaben für Lösungen linearer Randwertprobleme elliptischer Differentialgleichungssysteme. Math. Nachr. **18**, 106—119 (1958).

[7] Joh. Nitsche, Beitrag zum Randwertproblem eines linearen elliptischen Differentialgleichungssystems im Großen. Rend. Circ. mat. Palermo **3**, 109—114 (1954).

[8] I. N. Vekua, Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben. Mat. Sbornik **31** (**73**), 217—314 (1952). Deutsche Übersetzung: Berlin 1956.

[9] I. N. Vekua, Über die korrekte Stellung der Riemann-Hilbertschen Aufgabe. Ann. Acad. Scient. Fennicae A. I. **251/10**, 1—13 (1958).

Eingegangen am 15. 12. 1960

Anschrift des Autors:

J. Jaenicke, Technische Universität Berlin
Mathematisches Institut, Berlin-Charlottenburg 2
Hardenbergstr. 34

Zwei Bemerkungen zur Kapazität ebener Kontinuen

Von

Christian Pommerenke

1. Seien $\mathfrak{C}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ Kontinuen, die nicht zu einem Punkt ausgeartet sind. Für ihre Minkowskische Summe

$$\mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_m = \{w_1 + \cdots + w_m : w_k \in \mathfrak{C}_k,\, k = 1, \ldots, m\}$$

gilt dann die untere Abschätzung

$$\operatorname{cap}(\mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_m) \geqq \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap} \mathfrak{C}_k, \tag{1}$$

wie in [4] bewiesen wurde. Es soll nun untersucht werden, wann in (1) das Gleichheitszeichen steht.

Satz 1. *Seien $f_k(z) = \operatorname{cap} \mathfrak{C}_k \cdot z + \cdots$ die schlichten Funktionen, die $|z| > 1$ konform auf die Außengebiete von $\mathfrak{C}_k$ abbilden, und seien $\mathfrak{C}_k(r)$ die Komplemente der Bildgebiete von $|z| > r$ $(r > 1)$. Dann ist*

$$r^{-1} \operatorname{cap}(\mathfrak{C}_1(r) + \cdots + \mathfrak{C}_m(r)) \leqq \operatorname{cap}(\mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_m).$$

Weiter gilt

$$\operatorname{cap}(\mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_m) > \operatorname{cap} \mathfrak{C}_1 + \cdots + \operatorname{cap} \mathfrak{C}_m, \tag{2}$$

außer wenn alle $\mathfrak{C}_k$ konvex und homothetisch sind.

Zwei Mengen heißen zueinander homothetisch, wenn sie durch Translation und Streckung ineinander übergehen. Zum Beweis von Satz 1 werden die folgenden beiden Hilfssätze benötigt. Wenn $\mathfrak{C}$ ein Kontinuum und $f(z) = \operatorname{cap} \mathfrak{C} \cdot z + \cdots$ die Funktion ist, die $|z| > 1$ konform auf das Außengebiet von $\mathfrak{C}$ abbildet, so soll $\mathfrak{C}(r)$ das Komplement des Gebietes $\{w = f(z) : |z| > r\}$ sein.

Hilfssatz 1. *Sei die Funktion*

$$F(z) = az + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots$$

regulär in $1 < |z| < \infty$ und $\mathfrak{R}(r)$ das Bild von $|z| = r$. Wenn alle Häufungspunkte von $F(z)$ für $|z| \to 1$ in dem Kontinuum $\mathfrak{C}$ liegen, so ist

$$\mathfrak{R}(r) \subset \mathfrak{C}(r).$$

Beweis. Wenn $a = 0$ ist, so ist $F(z)$ regulär in $|z| > 1$. Also gilt $\mathfrak{R}(r) \subset \mathfrak{C}(\varrho)$ sogar für alle $\varrho > 1$. Sei daher $a \neq 0$, und sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller ζ, für die entweder

$|\zeta| = 1$ oder $|\zeta| > 1$ und $F(\zeta) \in \mathfrak{C}$ ist. Dann ist $\mathfrak{M}$ beschränkt und abgeschlossen, und genau wie im Beweis von Satz 1 in [4] zeigt man, daß $F(z)$ das Außengebiet $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$ schlicht auf das Außengebiet $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{C}$ abbildet. Umgekehrt ist $F(z) \in \mathfrak{H}$ nur für $z \in \mathfrak{G}$. Denn sonst ist entweder $z \in \mathfrak{M}$ und damit $F(z) \in \mathfrak{C}$, oder z ist in einem beschränkten Gebiet $\mathfrak{G}^*$ enthalten, das zu $\mathfrak{G}$ punktfremd ist und dessen Rand $\partial\mathfrak{G}^*$ ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört. Wenn $\mathfrak{H}^*$ das beschränkte Bildgebiet ist, so folgt $\partial\mathfrak{H}^* \subset \mathfrak{C}$, so daß $\mathfrak{H}^*$ und $\mathfrak{H}$ punktfremd sind, im Widerspruch zu $F(z) \in \mathfrak{H}$.

Sei $z = h(s)$ die schlichte Funktion, die $|s| > 1$ konform so auf $\mathfrak{G}$ abbildet, daß $h(\infty) = \infty$ und $a h'(\infty) > 0$ ist. Da $\mathfrak{G}$ in $|z| > 1$ liegt, gilt $|h(s)| > 1$, also nach dem Schwarzschen Lemma $|h(s)| \geqq |s|$ für $|s| > 1$. Die Funktion $F(h(s)) = a h'(\infty) \cdot s + \cdots$ bildet $|s| > 1$ konform auf $\mathfrak{H}$ ab. Wegen $a h'(\infty) > 0$ ist daher $f(s) = F(h(s))$. Es folgt, daß $\mathfrak{R}(r) \subset \mathfrak{C}(r)$ ist. Sonst gäbe es ein $w_0 = F(z_0)$ mit $|z_0| = r$, das nicht zu $\mathfrak{C}(r)$ gehört, d. h. es ist $w_0 = f(s_0)$, $|s_0| > r$. Da jedenfalls dann $w_0 \in \mathfrak{H}$ ist, nimmt $F(z)$ in $|z| > 1$ den Wert w_0 nur in z_0 an. Aus $w_0 = f(s_0) = F(h(s_0))$ ergibt sich also $z_0 = h(s_0)$ und daher $|z_0| \geqq |s_0| > r$, und dies widerspricht $|z_0| = r$.

Hilfssatz 2. *Seien $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_m$ Kontinuen und $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_m$. Dann ist*

$$\mathfrak{C}_1(r) + \cdots + \mathfrak{C}_m(r) \subset \mathfrak{C}(r).$$

Beweis. Seien $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ beliebige reelle Zahlen und

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} f_k(e^{i\vartheta_k} z).$$

Sei $\mathfrak{R}(r) = \mathfrak{R}(r; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ das Bild von $|z| = r$. Für $|z| \to 1$ liegen die Häufungspunkte von $f_k(e^{i\vartheta_k} z)$ in $\mathfrak{C}_k$, also die von $F(z)$ in $\mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}$. Nach Hilfssatz 1 ist daher

$$\mathfrak{R}(r; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) \subset \mathfrak{C}(r). \tag{3}$$

Wegen

$$\partial[\mathfrak{C}_1(r) + \cdots + \mathfrak{C}_m(r)] \subset \partial\mathfrak{C}_1(r) + \cdots + \partial\mathfrak{C}_m(r) = \bigcup_{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m} \left\{\sum_{k=1}^{m} f_k(r e^{i\vartheta_k})\right\} \subset \bigcup_{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m} \mathfrak{R}(r; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$$

ergibt sich aus (3)

$$\partial[\mathfrak{C}_1(r) + \cdots + \mathfrak{C}_m(r)] \subset \mathfrak{C}(r)$$

und daraus die Behauptung.

Beweis von Satz 1. Aus Hilfssatz 2 folgt (mit $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_m$)

$$\operatorname{cap}(\mathfrak{C}_1(r) + \cdots + \mathfrak{C}_m(r)) \leqq \operatorname{cap}\mathfrak{C}(r).$$

Wegen $\operatorname{cap}\mathfrak{C}(r) = r \operatorname{cap}\mathfrak{C}$ ist daher

$$r^{-1}\operatorname{cap}(\mathfrak{C}_1(r) + \cdots + \mathfrak{C}_m(r)) \leqq \operatorname{cap}\mathfrak{C} = \operatorname{cap}(\mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_m). \tag{4}$$

Die Ungleichung $\operatorname{cap}\mathfrak{C}_1 + \cdots + \operatorname{cap}\mathfrak{C}_m \leqq \operatorname{cap}\mathfrak{C}$, die bereits in [4] bewiesen wurde, erhält man wieder aus (4) durch Betrachtung großer r.

Sei nun

$$\operatorname{cap}(\mathfrak{E}_1 + \cdots + \mathfrak{E}_m) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap} \mathfrak{E}_k .$$

Dann hat die in $1 < |z| < \infty$ reguläre Funktion

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} f_k(z) = \left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap} \mathfrak{E}_k\right) z + \cdots$$

die Entwicklung

$$F(z) = \operatorname{cap} \mathfrak{E} \cdot z + \cdots . \tag{5}$$

Wenn man R genügend groß wählt, so sind für $r > R$ die Kontinuen $\mathfrak{E}_k(r)$ konvex und $F(z)$ in $|z| > R$ schlicht. Das Bild $\mathfrak{R}(r)$ von $|z| = r$ ist in $\mathfrak{E}_1(r) + \cdots + \mathfrak{E}_m(r)$ enthalten, und nach Hilfssatz 2 gehört diese Menge zu $\mathfrak{E}(r)$. Es gilt also

$$\mathfrak{R}(r) \subset \mathfrak{E}_1(r) + \cdots + \mathfrak{E}_m(r) \subset \mathfrak{E}(r) . \tag{6}$$

Da $F(z)$ in $|z| > R$ schlicht ist, folgt aus (5)

$$\operatorname{cap} \mathfrak{R}(r) = r \operatorname{cap} \mathfrak{E} = \operatorname{cap} \mathfrak{E}(r) .$$

Aus (6) ergibt sich also

$$\mathfrak{R}(r) = \partial[\mathfrak{E}_1(r) + \cdots + \mathfrak{E}_m(r)] . \tag{7}$$

Sei $L_k(r)$ der Umfang von $\mathfrak{E}_k(r)$ und $L(r)$ der Umfang von $\mathfrak{E}_1(r) + \cdots + \mathfrak{E}_m(r)$. Da sich bei der Minkowskischen Addition konvexer Mengen deren Umfänge addieren, gilt

$$L(r) = \sum_{k=1}^{m} L_k(r) \qquad (r > R) . \tag{8}$$

Andererseits ist $L(r)$ nach (7) die Länge von $\mathfrak{R}(r)$, also

$$L(r) = r \int_0^{2\pi} |F'(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta = r \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} f_k'(re^{i\vartheta}) \right| d\vartheta \leq r \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{m} |f_k'(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta = \sum_{k=1}^{m} L_k(r) .$$

Nach (8) muß hier das Gleichheitszeichen stehen. Also ist für $r > R$ und alle ϑ

$$\arg f_1'(re^{i\vartheta}) = \cdots = \arg f_m'(re^{i\vartheta})$$

und daher

$$f_k(z) \equiv \lambda_k f_1(z) + c_k \qquad (\lambda_k > 0,\, c_k \text{ komplex}) .$$

Mithin ist

$$\mathfrak{E}_k = \lambda_k \mathfrak{E}_1 + c_k$$

und die $\mathfrak{E}_k$ sind homothetisch.

Man erhält

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k f_1(z) + c_k) = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_m) f_1(z) + c .$$

Daher wird $|z| > 1$ durch $F(z)$ auf das Außengebiet von $\hat{\mathfrak{E}} = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)\mathfrak{E}_1 + c$ abgebildet. Da $\hat{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{E}$ ist und da $\operatorname{cap} \hat{\mathfrak{E}} = \sum \lambda_k \operatorname{cap} \mathfrak{E}_1 = \operatorname{cap} \mathfrak{E}$ gelten soll, ist $\hat{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}$, also

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)\mathfrak{E}_1 = \lambda_1 \mathfrak{E}_1 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{E}_1 .$$

Hieraus folgt, daß $\mathfrak{E}_1$ konvex ist und damit jedes $\mathfrak{E}_k$. Umgekehrt, wenn alle $\mathfrak{E}_k$ konvex sind und $\mathfrak{E}_k = \lambda_k \mathfrak{E}_1 + c_k$ ist, so gilt

$$\operatorname{cap}(\mathfrak{E}_1 + \cdots + \mathfrak{E}_m) = \operatorname{cap}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)\mathfrak{E}_1 = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)\operatorname{cap}\mathfrak{E}_1 = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap}\mathfrak{E}_k .$$

Man kann (2) auch so ausdrücken: Die Kapazität ist ein streng konkaves Funktional auf der Menge der konvexen Kontinuen. Denn wenn $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{E}_1$ nicht homothetisch sind, so gilt für $0 < \lambda < 1$

$$\operatorname{cap}(\lambda \mathfrak{E}_1 + (1-\lambda)\mathfrak{E}_0) > \lambda \operatorname{cap}\mathfrak{E}_1 + (1-\lambda)\operatorname{cap}\mathfrak{E}_0 .$$

Weiter ergibt sich aus Satz 1 unmittelbar die

Folgerung. *Das Kontinuum $\mathfrak{F}$ gehe durch Zentralsymmetrisierung in $\mathfrak{F}^*$ über, d. h. es ist $\mathfrak{F}^* = \frac{1}{2}(\mathfrak{F} + (-1)\mathfrak{F})$. Dann gilt*

$$\operatorname{cap}\mathfrak{F}^* > \operatorname{cap}\mathfrak{F},$$

außer wenn $\mathfrak{F}$ konvex und symmetrisch bez. eines Punktes ist.

Die Frage nach einer oberen Abschätzung läßt sich leicht behandeln, wenn die Kontinuen $\mathfrak{E}_k$ konvex sind. Seien nämlich L_k die Umfänge von $\mathfrak{E}_k$ und L der Umfang von $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \cdots + \mathfrak{E}_m$. Dann ist $L = L_1 + \cdots + L_m$. Wie Pólya und Schiffer [3] gezeigt haben (man vgl. auch [4]), ist $L_k \leqq 8 \operatorname{cap}\mathfrak{E}_k$. Daher gilt

$$2\pi \operatorname{cap}\mathfrak{E} \leqq L = L_1 + \cdots + L_m \leqq 8 \sum \operatorname{cap}\mathfrak{E}_k ,$$

also

$$\operatorname{cap}(\mathfrak{E}_1 + \cdots + \mathfrak{E}_m) \leqq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap}\mathfrak{E}_k .$$

Man kann $4/\pi \sim 1{,}273$ nicht durch eine kleinere von m unabhängige Zahl ersetzen. Denn für $\mathfrak{E}_k = \left[0, \frac{4}{m} e^{2\pi i k/m}\right]$ $(k = 1, \ldots, m)$ ist $\operatorname{cap}\mathfrak{E}_k = 1/m$, und $\mathfrak{E}_1 + \cdots + \mathfrak{E}_m$ ist ein regelmäßiges Vieleck mit mindestens m Seiten, das den Umfang 8 hat. Für $m \to \infty$ strebt dieses gegen einen Kreis vom Umfang 8, also vom Radius und damit von der Kapazität $4/\pi$, während $\sum \operatorname{cap}\mathfrak{E}_k = 1$ ist.

2. Sei jetzt $f(z)$ regulär, beschränkt und nicht konstant in $|z| < 1$. Sei $\mathfrak{A}(r)$ das Bild von $|z| \leqq r$ $(r < 1)$ und $\mathfrak{A}$ der Abschluß des Bildgebietes $\mathfrak{Q}$ von $|z| < 1$. Dann gilt, wie Erohin in [1] ankündigt,

$$\operatorname{cap}\mathfrak{A}(r) \leqq r \operatorname{cap}\mathfrak{A} .$$

Es soll nun eine Verschärfung dieser Ungleichung bewiesen werden.

Satz 2. *Sei $f(z) = a_0 + a_m z^m + \cdots$ $(m \geqq 1)$ regulär, beschränkt und nicht konstant in $|z| < 1$. Sei $\mathfrak{G}$ das kleinste beschränkte einfach zusammenhängende Gebiet, welches das Bildgebiet $\mathfrak{Q}$ enthält, und sei α_0 der innere konforme Radius von $\mathfrak{G}$ bez. a_0. Dann gilt mit $q_0 = \alpha_0/\operatorname{cap}\mathfrak{A}$*

$$\operatorname{cap}\mathfrak{A}(r) \leqq r^m \operatorname{cap}\mathfrak{A} \cdot \frac{r^m + q_0}{1 + q_0 r^m} \qquad (r < 1).$$

Insbesondere ist

$$\operatorname{cap} \mathfrak{A}(r) < r^m \operatorname{cap} \mathfrak{A},$$

außer wenn $f(z) \equiv a_0 + a_m z^m$ *ist.*

Bemerkung. Man zeigt leicht, daß $\mathfrak{G}$ existiert und die Vereinigungsmenge der Innengebiete aller geschlossenen Jordankurven ist, die in $\mathfrak{L}$ liegen. Es ist $\partial\mathfrak{G} \subset \mathfrak{A} \subset \subset \mathfrak{G} \cup \partial\mathfrak{G}$, also $\operatorname{cap} \partial\mathfrak{G} = \operatorname{cap} \mathfrak{A}$. Wenn $|z| < 1$ durch

$$g(z) = a_0 + \alpha_0 z + \cdots \qquad (\alpha_0 > 0)$$

schlicht auf $\mathfrak{G}$ abgebildet wird, so ist α_0 nach Definition der innere konforme Radius von $\mathfrak{G}$ bez. a_0. Sei A der Flächeninhalt von $\mathfrak{G}$. Dann gilt bekanntlich $\pi\alpha_0^2 \leq A$, und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $\mathfrak{G}$ eine Kreisscheibe ist. Andererseits ist $A \leq \pi(\operatorname{cap} \partial\mathfrak{G})^2 = \pi(\operatorname{cap} \mathfrak{A})^2$. Also gilt

$$q_0 = \alpha_0/\operatorname{cap} \mathfrak{A} < 1, \tag{9}$$

außer wenn $\mathfrak{G}$ eine Kreisscheibe, d. h. außer wenn $g(z) = a_0 + \alpha_0 z$ ist.

Beweis. Sei $g(z) = a_0 + \alpha_0 z + \cdots$ die schlichte Funktion, die $|z| < 1$ konform auf $\mathfrak{G}$ abbildet, und sei $\mathfrak{C}(\varrho)$ das Bild von $|z| = \varrho$ $(\varrho < 1)$. Weiter sei

$$d_n(\varrho) = \max_{w_1, \ldots, w_n \in \mathfrak{C}(\varrho)} \prod_{\mu \neq \nu} \prod |w_\mu - w_\nu|^{1/n(n-1)}. \tag{10}$$

Für festes $r < 1$ wähle man n komplexe Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ mit $|\zeta_\nu| = 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ so, daß

$$d_n(r) = \prod_{\mu \neq \nu} \prod |g(\zeta_\mu r) - g(\zeta_\nu r)|^{1/n(n-1)} \tag{11}$$

ist. Die ζ_ν sind dann voneinander verschieden. Da $g(z)$ schlicht ist, gilt $g(\zeta_\mu z) - g(\zeta_\nu z) \neq 0$ für $\mu \neq \nu$, $z \neq 0$. In der Nähe von 0 ist

$$g(\zeta_\mu z) - g(\zeta_\nu z) = \alpha_0 \cdot (\zeta_\mu - \zeta_\nu) z + \cdots.$$

Sei $r < \varrho < 1$. Dann ist die Funktion

$$G_n(z) = d_n(\varrho)^{-1} \prod_{\mu \neq \nu} \prod (g(\zeta_\mu z) - g(\zeta_\nu z))^{1/n(n-1)}$$

regulär in $|z| < 1$ und hat die Entwicklung

$$G_n(z) = d_n(\varrho)^{-1} \alpha_0 \prod_{\mu \neq \nu} \prod (\zeta_\mu - \zeta_\nu)^{1/n(n-1)} \cdot z + \cdots.$$

Wegen $|\zeta_\nu| = 1$ ist $\prod\prod |\zeta_\mu - \zeta_\nu| \leq n^n$, also

$$|G_n'(0)| \leq d_n(\varrho)^{-1} \alpha_0 n^{1/(n-1)}. \tag{12}$$

Da nach (10)

$$\max_{|z| = \varrho} |G_n(z)| \leq 1$$

und da $G_n(0) = 0$ ist, erhält man wegen $r < \varrho$ [2, S. 287]

(13) $$|G_n(r)| \leqq \varrho^{-1} r \cdot \frac{\varrho^{-1} r + \varrho\,|G_n'(0)|}{1 + \varrho\,|G_n'(0)| \cdot \varrho^{-1} r}.$$

Für $n \to \infty$ strebt $d_n(\varrho) \to \operatorname{cap} \mathfrak{C}(\varrho)$ nach (10) [2, S. 255] und $n^{1/(n-1)} \to 1$. Also ist

$$\limsup_{n \to \infty} |G_n'(0)| \leqq \alpha_0 / \operatorname{cap} \mathfrak{C}(\varrho).$$

Nach (11) ist $d_n(r) = d_n(\varrho)\,|G_n(r)|$. Aus (13) erhält man also

$$\operatorname{cap} \mathfrak{C}(r) \leqq \operatorname{cap} \mathfrak{C}(\varrho) \cdot \varrho^{-1} r \frac{\varrho^{-1} r + \varrho \alpha_0 / \operatorname{cap} \mathfrak{C}(\varrho)}{1 + r \alpha_0 / \operatorname{cap} \mathfrak{C}(\varrho)}.$$

Für $\varrho \to 1$ strebt $\operatorname{cap} \mathfrak{C}(\varrho) \to \operatorname{cap} \partial \mathfrak{G} = \operatorname{cap} \mathfrak{A}$, also $\alpha_0 / \operatorname{cap} \mathfrak{C}(\varrho) \to \alpha_0 / \operatorname{cap} \mathfrak{A} = q_0$. Daher ergibt sich

(14) $$\operatorname{cap} \mathfrak{C}(r) \leqq r \operatorname{cap} \mathfrak{A} \cdot \frac{r + q_0}{1 + r q_0}.$$

Da $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, ist $f(z)$ zu $g(z)$ subordiniert, d. h. es gibt eine Funktion $\varphi(z)$, die in $|z| < 1$ regulär ist und $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(z)| < 1$ und $f(z) = g(\varphi(z))$ erfüllt. Aus $f(z) = a_0 + a_m z^m + \cdots$ und $g(z) = a_0 + \alpha_0 z + \cdots$ $(\alpha_0 > 0)$ folgt, daß $\varphi(z) = a_m \alpha_0^{-1} z^m + \cdots$ ist. Nach dem Schwarzschen Lemma gilt also $|\varphi(z)| \leqq r^m$ in $|z| \leqq r$ und daher

$$\mathfrak{A}(r) = \{f(z) = g(\varphi(z)) : |z| \leqq r\} \subset \{g(\zeta) : |\zeta| \leqq r^m\}.$$

Also ist $\operatorname{cap} \mathfrak{A}(r) \leqq \operatorname{cap} \mathfrak{C}(r^m)$. Das Gleichheitszeichen kann nur stehen, wenn nicht $|\varphi(re^{i\vartheta})| < r^m$ für alle ϑ ist. Dann folgt $\varphi(z) \equiv \omega z^m$ $(|\omega| = 1)$, also $f(z) = g(\omega z^m)$. Aus (14) erhält man die behauptete Ungleichung

$$\operatorname{cap} \mathfrak{A}(r) \leqq \operatorname{cap} \mathfrak{C}(r^m) \leqq r^m \operatorname{cap} \mathfrak{A} \cdot \frac{r^m + q_0}{1 + q_0 r^m}.$$

Wegen (9) folgt hieraus

$$\operatorname{cap} \mathfrak{A}(r) \leqq r^m \operatorname{cap} \mathfrak{A},$$

und das Gleichheitszeichen kann nur stehen, wenn $\operatorname{cap} \mathfrak{A}(r) = \operatorname{cap} \mathfrak{C}(r^m)$, also $f(z) = g(\omega z^m)$, und außerdem $q_0 = 1$, also $g(z) = a_0 + \alpha_0 z$ ist. Somit ist dann $f(z) = a_0 + \omega \alpha_0 z^m$.

Aus der letzten Behauptung von Satz 2 folgt, daß $r^{-1} \operatorname{cap} \mathfrak{A}(r)$ streng monoton wächst (außer für $f(z) = a_0 + a_1 z$). Weiter kann man zeigen, daß $\operatorname{cap} \mathfrak{A}(r)$ logarithmisch konvex ist. Etwas allgemeiner gilt

Satz 3. *Sei $f(z)$ regulär in $R_1 < |z| < R_2$ und $\mathfrak{L}(r)$ das Bild von $|z| = r$. Dann ist* $\operatorname{cap} \mathfrak{L}(r)$ *logarithmisch konvex.*

Beweis. Seien $d_n(\varrho)$ und $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ entsprechend definiert wie im Beweis von Satz 2. Die Funktion

$$H(z) = \prod_{\mu \neq \nu} \prod (f(\zeta_\mu z) - f(\zeta_\nu z))$$

ist regulär in $R_1 < |z| < R_2$, und es ist

$$\max_{|z| = \varrho} |H(z)| \leqq d_n(\varrho)^{n(n-1)}, \quad |H(r)| = d_n(r)^{n(n-1)}.$$

Für $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$ folgt also aus dem Hadamardschen Dreikreisesatz

$$\log d_n(r) \leqq \frac{\log r_2/r}{\log r_2/r_1} \log d_n(r_1) + \frac{\log r/r_1}{\log r_2/r_1} \log d_n(r_2).$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich hieraus die Behauptung, da $d_n(\varrho) \to \operatorname{cap} \mathfrak{C}(\varrho)$ strebt.

Literaturverzeichnis

[1] V. EROHIN, Über die Theorie der konformen und quasikonformen Abbildung von mehrfach zusammenhängenden Gebieten (Russisch). Dokl. Akad. Nauk SSSR **127**, 1155—1157 (1959).
[2] G. M. GOLUSIN, Geometrische Funktionentheorie. Berlin 1957.
[3] G. PÓLYA et M. SCHIFFER, Sur la représentation conforme de l'extérieur d'une courbe fermée convexe. C. R. Acad. Sci. Paris **248**, 2837—2839 (1959).
[4] CH. POMMERENKE, Über die Kapazität der Summe von Kontinuen. Math. Ann. **139**, 127—132 (1959).

Eingegangen am 27. 2. 1961

Anschrift des Autors:
Christian Pommerenke
Mathematisches Institut
Göttingen, Bunsenstr. 3

Hereditary Properties of some Special Spaces

By

CARL W. KOHLS[1])

Recently, M. HENRIKSEN asked whether every dense subspace of a basically disconnected space is also basically disconnected[2]). We consider this type of question for basically disconnected spaces and ten other classes of spaces discussed in [1], and for three kinds of subspaces, namely, dense, open and closed subspaces. Of the thirty-three questions thus raised, the answers to twelve are trivial or already known. The results presented here provide answers to the others, as well as more striking counterexamples in some of the known cases.

In the last section, we discuss briefly some other questions related to two of these classes of spaces.

1. Definitions and summary of results. All spaces considered in this note are completely regular Hausdorff spaces. We use the following notation and terminology of [2]: For any space X, βX is the Stone-Čech compactification of X; $C(X)$ is the set of all continuous real-valued functions on X, while $C^*(X)$ is the set of bounded functions in $C(X)$; $\mathrm{cl}_X S$ is the closure of the set S in X. For each $f \in C(X)$, $\{x \in X : f(x) = 0\}$ is called the *zero-set* of f and is denoted by $\boldsymbol{Z}(f)$; the complement of a zero-set is called a *cozero-set*. For $S \subset X$, if each $f \in C^*(S)$ can be extended to a function in $C^*(X)$, then S is said to be *C^*-embedded* in X. The reader is referred to [2] for other basic terminology and notation, as well as for general background.

A point $p \in X$ is called: (i) a *P-point*, if for each $f \in C(X)$ that vanishes at p, there is a neighborhood U of p such that $f(U) = 0$; (ii) a *P'-point*, if for each $f \in C(X)$ that vanishes at p, there is a deleted neighborhood U' of p such that either $f(U') = 0$, $f(U') > 0$, or $f(U') < 0$; (iii) an *F'-point*[3]), if for each $f \in C(X)$ that vanishes at p, there is a neighborhood U of p such that either $f(U) \geqq 0$ or $f(U) \leqq 0$.

We list below definitions of most of the classes of spaces to be considered; further information may be found in [1].

A space X is called a *P-space* (*P'-space*, *F'-space*) if every point of X is a P-point (P'-point, F'-point). A space X is called an *F-space* if for each $f \in C(X)$ there is a $k \in C(X)$ such that $f = k|f|$; if k can always be chosen to be a unit of $C(X)$, then X is called a *U-space*. A space is *extremally disconnected* (*basically disconnected*) if the

[1]) The preparation of this paper was sponsored in part by the National Science Foundation, under grant NSF G-14457.

[2]) I wish to thank L. GILLMAN for communicating this question, and for supplying an idea for the proof of the theorem in section 2.

[3]) This terminology is not used elsewhere, but seems best for our present purposes.

closure of every open set (cozero-set) is open. A space is *zero-dimensional* if any two disjoint zero-sets are contained in disjoint open-and-closed sets[4]).

There remain two classes, the D-spaces and T-spaces; we shall not define them, since the definitions will not be needed explicitly here.

The following diagram, taken from [1, 8.15], shows the implications among the spaces to be considered.

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[r] & P \arrow[dr] & & & D \arrow[r] & T \arrow[r] & F \arrow[r] & F' \\
\text{discrete} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \text{basic. disconn.} \arrow[r] & U \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \text{extr. disconn.} \arrow[urr] & & & & \text{zero-dim.} & & &
\end{tikzcd}$$

The results on hereditary properties of these spaces that are not new are as follows:

(1) Every subspace of a discrete space is discrete (trivial);

(2) Every subspace of a P-space is a P-space [2, 4K];

(3) Every dense subspace and every open subspace of an extremally disconnected space is extremally disconnected [2, 1H], but a closed subspace need not be basically disconnected [2, 6W];

(4) There exists a dense, open subspace of a zero-dimensional space that is not zero-dimensional [2, 16M].

Our results are as follows:

(5) There exists a dense subspace of a P'-space that is not an F'-space (Example 1);

(6) Every open subspace of a P'-space, basically disconnected space or F'-space is also a P'-space, basically disconnected space or F'-space, respectively (Theorem);

(7) There exists an open (and dense) subspace of a U-space that is not an F-space (Example 2);

(8) There exists a closed subspace of an extremally disconnected space that is not an F'-space (Example 3);

(9) There exists a closed subspace of a P'-space that is not an F'-space (Example 4);

(10) There exists a closed subspace of a zero-dimensional space that is not zero-dimensional (Example 5).

By combining all these statements, and using the diagram of implications above, one sees readily that the only hereditary properties that hold for dense, open and closed subspaces are those listed specifically in (1), (2), (3) and (6); statements in (3), (4), (5), (7), (8), (9) and (10) provide counterexamples for all other cases. There is considerable overlap — both Examples 1 and 2 provide several answers about dense subspaces, while both Examples 3 and 4 provide several answers about closed subspaces — but no example is superfluous.

Repeated use will be made of the following spaces defined in [1, § 8][5]): (i) The subspace E of the Stone-Čech compactification of the denumerable discrete space $N = \{e_1, e_2, \ldots\}$, consisting of N and one point $e \in \beta N - N$; (ii) The space L of all ordinals $\leqq \omega_1$, with neighborhoods of ω_1 as in the interval topology and every other point isolated; (iii) The space L' of all ordinals $\leqq \omega_2$, with neighborhoods of ω_2 as in the interval topology and every other point isolated.

---

[4]) This is not equivalent to the definition used in [1]; see [2, 16.17].

[5]) We use here the notation of [1] rather than [2].

2. The results.

Theorem. *Let Y be an open subspace of X. If X is either a P'-space, basically disconnected space or F'-space, then Y is in the same class of spaces.*

Proof. We give the proof for basically disconnected spaces; the other two proofs are similar. Suppose, contrapositively, that for some $g \in C^*(Y)$, there is a point p in the boundary of $\mathrm{cl}_Y(Y - \boldsymbol{Z}(g))$. Since Y is open, there is a $\varphi \in C(X)$ that vanishes on $X - Y$ and is equal to one on a neighborhood of p. Now g is bounded; so the function f such that $f(x) = 0$ for $x \in X - Y$, and $f(x) = \varphi(x) g(x)$ for $x \in Y$, is in $C(X)$. Since p is in the boundary of $\mathrm{cl}_X(X - \boldsymbol{Z}(f))$, the space X is not basically disconnected.

Example 1. *A P'-space with a dense subspace that is not an F'-space.* Let T be the space obtained by identifying the non-isolated points in two copies of the space L, and let t denote the non-isolated point of T. The subspace X of $T \times E$ obtained by removing all points of $T \times \{e\}$ except (t, e) is a P'-space. The space $Y = X - - \{(t, e_1), (t, e_2), \ldots\}$ is dense in X. But it is not an F'-space, since, as is easily seen, (t, e) is not an F'-point of Y.

Example 2. *A U-space with an open subspace that is not an F-space.* Let S be the space obtained by identifying the non-isolated points in the spaces L' and E, and let X be the quotient space of $S \times L$ obtained by identifying all points of the subspace of $S \times \{\omega_1\}$ that was obtained from E. Since the point $p \in X$ that corresponds to this set is a P-point, it is easy to see that X is a U-space. The open subspace $X - \{p\}$ is the space described in [1, 8.14]; it is shown there that it is not an F-space.

Example 3. *An extremally disconnected space with a closed subspace that is not an F'-space.* Let Π be the space discussed in [2, 6Q]: Π is a subspace of the Stone-Čech compactification of the discrete space $\mathbf{N}$ of positive integers, consisting of $\mathbf{N}$ and a set D of power $\mathfrak{c}$ that is a discrete subset of $\beta\mathbf{N} - \mathbf{N}$. Since D is not C^*-embedded in Π, it is not C^*-embedded in $\mathrm{cl}_{\beta\Pi} D$. Hence, by [2, 6.4], there exists a point $p \in \mathrm{cl}_{\beta\Pi} D - D$ that is in the closure of two disjoint zero-sets A, B on D. Let X be the subspace $\Pi \cup \{p\}$ of $\beta\Pi$, and let Y be the subspace $D \cup \{p\}$ of X. Then Y is closed in X; and X, being a dense subspace of $\beta\Pi = \beta\mathbf{N}$, is extremally disconnected.

We show that Y is not an F'-space. By [2, 8.18], Π is realcompact, because there is a continuous, one-one mapping of Π onto the real numbers [2, 6Q.7]. Hence there exists a non-negative function $\varphi \in C(\beta\Pi)$ such that $p \in \boldsymbol{Z}(\varphi) \subset \beta\Pi - \Pi$. Let $g \in C^*(D)$ be such that $g[A] = \{1\}$ and $g[B] = \{-1\}$. The function f on Y such that $f(p) = 0$, and $f(y) = \varphi(y) g(y)$ for $y \neq p$, is in $C(Y)$ and changes sign in every neighborhood of p; so p is not an F'-point of Y.

Example 4. *A P'-space with a closed subspace that is not an F'-space.* Let $\{T_n\}$ be a denumerable family of copies of the space $L' \times L - \{(\omega_2, \omega_1)\}$, and let T be the sum of the T_n's. Then T is a P-space. We denote by S_n the subset of T_n corresponding to $\{(\omega_2, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$, and set $S = \bigcup_n S_n$. Since S_n is not C^*-embedded in T_n, it follows as in Example 3 that there exists a point $p_n \in \beta T_n$ that is in the closure of two dis-

joint subsets A_n, B_n of S_n[6]). We set $A = \bigcup_n A_n$ and $B = \bigcup_n B_n$. Next, we choose a point $p \in \mathrm{cl}_{\beta T}\{p_1, p_2, \ldots\} - \{p_1, p_2, \ldots\}$. Then $p \in \mathrm{cl}_{\beta T} A \cap \mathrm{cl}_{\beta T} B$, and, moreover, there exists a non-negative function $\varphi \in C(\beta T)$ such that $p \in \mathbf{Z}(\varphi) \subset \beta T - T$. Let X be the space $T \cup \{p\}$, and let Y be its closed subspace $S \cup \{p\}$. Applying [2, 7L] and the fact that T is a P-space, we see without difficulty that X is a P'-space. But Y is not an F'-space; for, using φ together with any $g \in C^*(S)$ such that $g[A] = \{1\}$ and $g[B] = \{-1\}$, one may imitate the construction in Example 3 to produce a function in $C(Y)$ that changes sign in every neighborhood of p.

Example 5. *A zero-dimensional space with a closed subspace that is not zero-dimensional.* Let Δ_0 be the zero-dimensional space described in [2, 16M], and let Δ_1 be its one-dimensional subspace. Denote the single point in $\Delta_0 - \Delta_1$ by t. We define X to be the space $L' \times \Delta_0 - \{(\omega_2, t)\}$. Using properties of Δ_0, we may apply a cofinality argument to show that for $f \in C(X)$, there exists $\alpha < \omega_2$ such that $f(\alpha, d) = f(\sigma, d)$ whenever $\alpha < \sigma \leqq \omega_2$ and $d \in \Delta_1$, and $f(\alpha, t) = f(\sigma, t)$ whenever $\alpha < \sigma < \omega_2$. Combining this result with [2, 16M.7] and remembering that t is a P-point of the zero-dimensional space Δ_0, one can prove without difficulty that X is zero-dimensional. But the closed subspace $\{\omega_2\} \times \Delta_1$ is homeomorphic with Δ_1, and hence is not zero-dimensional.

3. Other examples. In this section, examples are given to show that the answer to each of the following questions is negative:

(1) Is there an algebraic characterization of P'-spaces X in terms of the ring $C(X)$?

(2) The same question for F'-spaces.

(3) In a P'-space, does every point that is not a P-point possess a deleted neighborhood of P-points?

(4) Does every F'-point possess a neighborhood of F'-points?

An example for (1) is provided by the space $L \times E$ discussed in [1, 8.11]. This space is not a P'-space, but the subspace $L \times E - \{(\omega_1, e)\}$ is; and $C(L \times E)$ is isomorphic with $C(L \times E - \{(\omega_1, e)\})$.

An example for (2) is provided by the quotient space of the sum of $L' \times L$ and a family $\{D_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ of copies of E obtained by identifying each point $(\omega_2, \alpha) \in L' \times L$, $\alpha < \omega_1$, with the non-isolated point of D_α. This space is not an F'-space, but the subspace $X - \{(\omega_2, \omega_1)\}$ is[7]); and $C(X)$ is isomorphic with $C(X - \{(\omega_2, \omega_1)\})$.

We next describe a P'-space having a non-P-point that is a limit point of a set of non-P-points. First, let Y denote the quotient space of $L \times E$ obtained by identifying all points of the set $\{\omega_1\} \times E$. The point in Y corresponding to this set will be denoted by p. Now let X be the space obtained from $Y \times E$ by removing all points in the subset $Y \times \{e\}$ except (p, e). Then X is a P'-space, and (p, e) is a non-P-point that is a limit point of a set of non-P-points.

An example for (4) may be obtained by repeating the previous construction with the one-point compactification of a denumerable discrete space replacing E in the definition of Y. The resulting space contains an F'-point (in fact, a P'-point) that is a limit point of a set of non-F'-points.

---

[6]) Of course, the choice of p_n can easily be made more specific, but this is unnecessary.

[7]) The subspace is the same as the subspace $X - \{p\}$ of Example 2.

References

[1] L. GILLMAN and M. HENRIKSEN, Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal. Trans. Amer. Math. Soc. 82, 366—391 (1956).
[2] L. GILLMAN and M. JERISON, Rings of continuous functions. Princeton, Van Nostrand 1960.

Eingegangen am 28. 2. 1961

Anschrift des Autors:
Carl W. Kohls
Department of Mathematics
University of Rochester
Rochester 20 (N. Y.), USA

Zentrale Automorphismen von λ-Räumen

Von

Heinz Lüneburg

0. Einleitung. Betrachtet man von einer endlichen projektiven Geometrie $\mathfrak{P}$ der Dimension $d \geq 2$ nur die Menge der Punkte und die Menge der Hyperebenen und die in $\mathfrak{P}$ zwischen Punkten und Hyperebenen erklärte Inzidenz, so bildet dieses System bekanntlich einen symmetrischen Blockplan (siehe z. B. Pickert [7], S. 288 und Dembowski [4], S. 75). Andererseits gibt es symmetrische Blockpläne, die sich nicht in der eben geschilderten Weise von projektiven Geometrien herleiten lassen (siehe z. B. Bose [3]). Es erhebt sich also die Frage, wie man die endlichen projektiven Geometrien unter den symmetrischen Blockplänen kennzeichnen kann.

Die Automorphismengruppe einer projektiven Geometrie enthält im Gegensatz zu den übrigen symmetrischen Blockplänen sehr viele zentrale Automorphismen, das sind solche, die alle Hyperebenen durch einen Punkt festlassen. Man kann also hoffen, mit Hilfe von solchen zentralen Automorphismen zu einer Kennzeichnung zu kommen. Dazu ist es jedoch nötig, zuerst zentrale Automorphismen von λ-Räumen zu untersuchen. (Zum Begriff des λ-Raumes siehe die Definition in Abschnitt 1 und Satz 1.) Es wird sich herausstellen, daß sie nicht mehr dieselben Eigenschaften haben wie zentrale Automorphismen von projektiven Geometrien. So gibt es beispielsweise zentrale Automorphismen, die keine Achse besitzen. Diese Untersuchungen werden in den Abschnitten 1 und 2 durchgeführt. In Abschnitt 3 untersuchen wir Gruppen von axialen und zentralen Automorphismen, um dann ab Abschnitt 4 zu unserer eigentlichen Fragestellung, nämlich der Kennzeichnung von endlichen projektiven Räumen zu kommen. Das Hauptergebnis (Abschnitt 4) lautet, grob formuliert, so, daß alle Translations-λ-Räume endliche projektive Räume sind. In den weiteren Abschnitten untersuchen wir, wie man die Voraussetzungen des Hauptsatzes abschwächen kann, wenn man noch voraussetzt, daß der betrachtete λ-Raum endlich ist.

An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Professor Baer und Herrn Dr. Dembowski für manch wertvollen Hinweis bei der Verfertigung dieser Arbeit danken.

1. λ-Räume. Wir denken uns zwei Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{B} = \emptyset$ und eine Relation $\in$ zwischen diesen beiden Mengen gegeben. Die Elemente von $\mathfrak{P}$ nennen wir Punkte und die Elemente von $\mathfrak{B}$ nennen wir Blöcke. Ist P ein Element von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{b}$ ein Element von $\mathfrak{B}$ und gilt $P \in \mathfrak{b}$, dann sagen wir: P ist mit $\mathfrak{b}$ inzident oder auch P liegt auf $\mathfrak{b}$, es geht $\mathfrak{b}$ durch P usw. Schreibt man $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{B}; \in\}$, dann ist $\mathfrak{R}$ eine verallgemeinerte Inzidenzstruktur im Sinne von Dembowski [4]. $\mathfrak{R}$ heißt ein *λ-Raum*, falls $\mathfrak{R}$ folgenden Forderungen genügt:

(I) *Zwei verschiedene Punkte (Blöcke) von $\mathfrak{R}$ sind mit genau λ Blöcken (Punkten) inzident.*

(II) *Es gibt stets einen Punkt (Block), der nicht mit zwei beliebig vorgegebenen Blöcken (Punkten) inzidiert*).*

(III) *Es gibt stets einen Punkt P und einen Block $\mathfrak{b}$ mit $P \in \mathfrak{b}$.*

Wir setzen stets voraus, daß λ eine natürliche Zahl ist. Sei $k = k(P)$ die Anzahl der Blöcke durch den Punkt P. Aus (I) und (III) folgt, daß $k > 0$ ist. Sei $Q \neq P$ ein weiterer Punkt von $\mathfrak{R}$. (Nach (II) und (III) gibt es einen solchen.) Nach (II) gibt es einen Block $\mathfrak{b}$ mit $P, Q \notin \mathfrak{b}$. Sei $r = r(\mathfrak{b})$ die Anzahl der Punkte auf $\mathfrak{b}$. Nach (I) folgt dann $\lambda k(P) = \lambda r(\mathfrak{b}) = \lambda k(Q)$. Da λ eine natürliche Zahl ist, folgt, daß $k(P) = r(\mathfrak{b}) = k(Q)$ ist. Die Anzahl k der Blöcke durch P ist also unabhängig von P. Aus Dualitätsgründen ist dann auch $r = r(\mathfrak{b})$ von $\mathfrak{b}$ unabhängig und außerdem ist $r = k$. Ist $\mathfrak{R}$ endlich, so ist also $\mathfrak{R}$ ein symmetrischer Blockplan (siehe etwa PICKERT [7] S. 288). Andererseits ist nicht jeder symmetrische Blockplan ein endlicher λ-Raum, wie wir gleich sehen werden. Zunächst beweisen wir

Hilfssatz 1. *Ist $\mathfrak{R}$ ein λ-Raum, so ist stets $2 + \lambda \leqq k$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ ein unendlicher λ-Raum, so ist auch k unendlich und also sicherlich $2 + \lambda \leqq k$. Sei also $\mathfrak{R}$ endlich. Bezeichnet man mit v die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{R}$, so ist $\lambda' = v - 2k + \lambda$ die Anzahl der Blöcke, die durch keinen von zwei verschiedenen Punkten gehen. Ebenso ist λ' die Anzahl der Punkte, die auf keinem von zwei verschiedenen Blöcken liegen, da $\mathfrak{R}$, wie oben bemerkt wurde, ein symmetrischer Blockplan und somit v nach PICKERT [7] S. 288 auch gleich der Anzahl der Punkte von $\mathfrak{R}$ ist. Setzt man $k - \lambda = n$, so gilt

$$\lambda \lambda' = n(n-1). \tag{1}$$

Denn aus der bekannten Formel (PICKERT [7] S. 288)

$$\lambda(v-1) = k(k-1) \tag{2}$$

folgt, daß

$$\lambda\lambda' = \lambda[v - (2k - \lambda)] = \lambda(v-1) + \lambda(2k - \lambda) + \lambda =$$
$$= k(k-1) - (k-n)(k+n) + k - n = n(n-1).$$

Wegen (II) ist $\lambda' > 0$, also $\lambda\lambda' > 0$, woraus $k - \lambda = n \geqq 2$ folgt, w. z. b. w.

Unsere Frage, welche symmetrischen Blockpläne endliche λ-Räume sind, beantwortet nun

Satz 1. *Ein symmetrischer Blockplan ist genau dann ein endlicher λ-Raum, wenn $n \geqq 2$ ist.*

Beweis. Ein symmetrischer Blockplan erfüllt (I) und (III). Er ist also genau dann ein endlicher λ-Raum, wenn er auch (II) erfüllt. Das ist nun gleichwertig damit, daß

*) Es ist auch zugelassen, daß diese beiden Elemente gleich sind.

$\lambda' > 0$ ist. Nun gilt (1) für jeden symmetrischen Blockplan. Also ist $\lambda' > 0$ genau dann, wenn $n \geqq 2$ ist, w. z. b. w.

Eine vollständige Aufzählung der symmetrischen Blockpläne mit $n = 1$ findet man in Dembowski [4] S. 63.

Aus (I) folgt sofort folgender nützliche

Hilfssatz 2. $\lambda + 1$ *Punkte (Blöcke) sind mit höchstens einem Block (Punkt) inzident.*

Sind P und Q zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{R}$, so definieren wir als *Verbindungsgerade von P und Q* die Menge aller Punkte, die mit allen Blöcken durch P und Q inzidieren. Wir bezeichnen sie mit PQ. Aus der Endlichkeit von λ folgt, daß eine Gerade durch irgendzwei ihrer Punkte bestimmt ist.

2. Zentrale und axiale Automorphismen. Ist σ ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$ und läßt σ alle Blöcke durch einen Punkt C fest, so nennen wir σ einen *zentralen Automorphismus*. C heißt das *Zentrum* von σ. Läßt σ alle mit einem Block $\mathfrak{a}$ inzidenten Punkte fest, so nennen wir σ einen *axialen Automorphismus*. Den Block $\mathfrak{a}$ nennen wir *Achse* von σ. Statt „σ ist ein zentraler bzw. axialer Automorphismus" werden wir im folgenden häufig sagen, daß σ zentral bzw. axial sei.

Ist $\lambda = 2$, so gibt es weder zentrale noch axiale Automorphismen außer der Identität. Ist nämlich C das Zentrum eines zentralen Automorphismus σ und P ein von C verschiedener Punkt, so gibt es durch P und C genau zwei Blöcke. Diese beiden Blöcke bleiben unter σ fest. Da C ebenfalls fest bleibt und der Durchschnitt der beiden Blöcke außer C nur noch P enthält, muß also auch P fest bleiben. Da P beliebig war, folgt, daß σ die Identität ist. Der duale Schluß zeigt, daß es auch keine axialen Automorphismen außer der Identität gibt.

Satz 2. *Ist σ axial (zentral) mit zwei verschiedenen Achsen (Zentren), so ist σ die Identität.*

Beweis. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien zwei verschiedene Achsen von σ. Ist $P \in \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$, dann ist $P^\sigma = P$. Sei also $P \notin \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Sei ferner $P \in \mathfrak{c}$ und $|\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}| < \lambda$. Daraus folgt

$$|\mathfrak{c} \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})| = |(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}) \cup (\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b})| = 2\lambda - |\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}| > 2\lambda - \lambda = \lambda.$$

Auf $\mathfrak{c}$ liegen also mindestens $\lambda + 1$ Fixpunkte. Hieraus und aus Hilfssatz 2 folgt $\mathfrak{c}^\sigma = \mathfrak{c}$. Wegen $\lambda + 2 \leqq k$ und Hilfssatz 2 gibt es mindestens $\lambda + 1$ solcher Blöcke $\mathfrak{c}_i$. Daraus folgt, indem man nochmals Hilfssatz 2 anwendet, daß $P^\sigma = \left(\bigcap_{i=1}^{\lambda+1} \mathfrak{c}_i\right)^\sigma = \bigcap_{i=1}^{\lambda+1} \mathfrak{c}_i^\sigma = \bigcap_{i=1}^{\lambda+1} \mathfrak{c}_i = P$ ist. Also gilt $P^\sigma = P$ für alle Punkte $P \in \mathfrak{R}$ und folglich ist $\sigma = 1$, w. z. b. w.

Hilfssatz 3. *Ist σ zentral, C das Zentrum von σ und g eine Gerade durch C, dann ist $g^\sigma = g$.*

Der Hilfssatz folgt sofort aus der Definition der Geraden und der zentralen Automorphismen.

Aus Hilfssatz 3 folgt nun

Hilfssatz 4. *Ist σ zentral, C das Zentrum von σ und P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{R}$, so sind C, P, P^σ kollinear.*

Hilfssatz 5. *Ist σ zentral mit dem Zentrum C und ist $C \notin \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\sigma$, so ist $\mathfrak{a}$ Achse von σ.*

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{a}$, dann ist nach Hilfssatz 2 $AC \cap \mathfrak{a} = A$, da $C \notin \mathfrak{a}$ vorausgesetzt ist. Nach Hilfssatz 3 ist $(AC)^\sigma = AC$. Daraus folgt

$$A^\sigma = (AC \cap \mathfrak{a})^\sigma = (AC)^\sigma \cap \mathfrak{a}^\sigma = AC \cap \mathfrak{a} = A\,.$$

Hilfssatz 6. *Ist σ zentral und $\mathfrak{b}$ ein Block mit $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}^\sigma$, dann bleibt der Durchschnitt $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\sigma$ punktweise fest.*

Beweis. Das Zentrum C von σ liegt weder auf $\mathfrak{b}$ noch auf $\mathfrak{b}^\sigma$, da sonst $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^\sigma$ wäre. Sei nun $B \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\sigma$, dann ist $B = BC \cap \mathfrak{b} = BC \cap \mathfrak{b}^\sigma$. Also ist wegen Hilfssatz 3

$$B^\sigma = (BC \cap \mathfrak{b})^\sigma = (BC)^\sigma \cap \mathfrak{b}^\sigma = BC \cap \mathfrak{b}^\sigma = B.$$

Satz 3. *Ist σ zentral, so gibt es zwei verschiedene Blöcke $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die nicht durch das Zentrum C von σ gehen und deren Durchschnitt punktweise fest bleibt. Ferner gibt es einen Punkt P mit $C \neq P = P^\sigma \notin \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.*

Beweis. Ist σ die Identität, so ist diese Aussage trivial. Ist $\sigma \neq 1$, dann gibt es einen Block $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{c}^\sigma$. Setzt man $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^\sigma$, dann bleibt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ nach Hilfssatz 6 punktweise fest. Die erste Aussage von Satz 3 ist also bewiesen. Angenommen die zweite Aussage wäre falsch, dann wäre $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{x} \cap \mathfrak{x}^\sigma$ für alle Blöcke $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{x}^\sigma$. Es ist $C \notin \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Es gibt also einen Block $\mathfrak{d}$ mit $C \in \mathfrak{d}$ und $|\mathfrak{d} \cap \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}| < \lambda$. Da $\lambda + 2 \leqq k$ ist, gibt es ein Q mit $Q \in \mathfrak{d}$, $Q \notin \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und $C \neq Q$. Nach Hilfssatz 1 und Hilfssatz 2 gibt es mindestens $\lambda + 1$ Blöcke $\mathfrak{d}_i$ mit $Q \in \mathfrak{d}_i$ und $|\mathfrak{d}_i \cap \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}| < \lambda$ für $i = 1, 2, \ldots, \lambda + 1$. Wegen $Q = \bigcap_{i=1}^{\lambda+1} \mathfrak{d}_i$ gibt es einen Block $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}_{i0}$ mit $C \notin \mathfrak{g}$. Angenommen es wäre $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\sigma$, dann bliebe $\mathfrak{g}$ nach Hilfssatz 5 punktweise fest und es wäre $Q = Q^\sigma$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}^\sigma$, woraus $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^\sigma = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ folgt. Hieraus folgt $\lambda = |\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}| < \lambda$, was nicht sein kann. Unsere Annahme ist also falsch und Satz 3 folglich bewiesen.

Ist $\mathfrak{R}$ ein projektiver Raum, so wissen wir bereits, daß alle zentralen Automorphismen auch axial sind und umgekehrt. Für einen beliebigen λ-Raum gilt dies nun nicht mehr, wie folgendes Beispiel zeigt.

A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	C	C	C	C
B	B	B	D	D	F	F	D	D	E	E	D	D	E	E
C	C	C	E	E	G	G	F	F	G	G	G	G	F	F
D	H	P	H	L	H	K	H	L	H	K	H	K	H	K
E	K	Q	K	M	L	M	K	M	M	L	L	M	M	L
F	L	R	P	R	P	Q	R	P	Q	P	Q	P	P	Q
G	M	S	Q	S	R	S	S	Q	R	S	S	R	S	R

Die Punkte dieses Beispiels werden durch die Buchstaben, die Blöcke durch die

Spalten des Schemas dargestellt. Es ist also $r = 15$, $k = 7$ und $\lambda = 3$. Der Automorphismus $\sigma = (HK)(LM)(PQ)(RS)$ ist axial mit der Achse $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G$. Der Automorphismus σ ist aber nicht zentral, denn hätte σ ein Zentrum, so müßte dies auf der Geraden HK liegen. Wie man sofort verifiziert, besteht die Gerade HK aber nur aus den beiden Punkten H und K, die beide keine Fixpunkte sind. σ hat folglich kein Zentrum. Dieses und weitere Beispiele findet man in TODD [8].

3. Gruppen von axialen und zentralen Automorphismen. Ist σ ein axialer Automorphismus mit der Achse $\mathfrak{a}$ und hat σ außerhalb $\mathfrak{a}$ keinen Fixpunkt, so nennen wir σ eine *Translation*. Die Identität möge der Bequemlichkeit halber auch Translation genannt werden. Hat σ außerhalb von $\mathfrak{a}$ noch einen Fixpunkt, so nennen wir σ eine *Streckung*. Die Identität ist also auch eine Streckung. Eine Streckung besitzt stets Achse und Zentrum, während eine Translation kein Zentrum zu besitzen braucht.

Zunächst ist klar, daß die axialen und zentralen Automorphismen mit fester Achse und festem Zentrum eine Gruppe bilden. Mit $\Gamma_{C\mathfrak{a}}$ bezeichnen wir die Gruppe der Translationen mit der Achse $\mathfrak{a}$ und dem Zentrum $C \in \mathfrak{a}$. Es gilt nun

Hilfssatz 7. *$\Gamma_{C\mathfrak{a}}$ ist halbregulär auf den Punkten von $\mathfrak{R} - \mathfrak{a}$. (Eine Permutationsgruppe heißt halbregulär, wenn nur die Identität Fixelemente besitzt.* WIELANDT [10], S. 8.*)*

Beweis. Sei $\sigma \in \Gamma_{C\mathfrak{a}}$, $P^\sigma = P$ und $P \notin \mathfrak{a}$. Nach dem zu Hilfssatz 5 dualen Satz ist P Zentrum von σ. Der Automorphismus σ hat folglich zwei Zentren und ist also nach Satz 2 die Identität.

Hilfssatz 8. *Es ist $\Gamma_{C\mathfrak{a}} \cap \Gamma_{D\mathfrak{a}} = 1$, falls $C \neq D$ ist.*

Beweis. Ist $\sigma \in \Gamma_{C\mathfrak{a}} \cap \Gamma_{D\mathfrak{a}}$, dann hat σ die beiden Zentren C und D, woraus nach Satz 2 folgt, daß $\sigma = 1$ ist.

Hilfssatz 9. *Ist $\sigma \in \Gamma_{C\mathfrak{a}}$, $\tau \in \Gamma_{D\mathfrak{a}}$ und $C \neq D$, so ist $\sigma\tau = \tau\sigma$.*

Beweis. Es ist $\tau^{-1}\Gamma_{C\mathfrak{a}}\tau = \Gamma_{C\mathfrak{a}}$ und $\sigma^{-1}\Gamma_{D\mathfrak{a}}\sigma = \Gamma_{D\mathfrak{a}}$ wegen $C, D \in \mathfrak{a}$. Daraus folgt $\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau \in \Gamma_{C\mathfrak{a}} \cap \Gamma_{D\mathfrak{a}} = 1$, w. z. b. w.

Hilfssatz 10. *Ist $\Gamma_\mathfrak{a} = \langle \Gamma_{C\mathfrak{a}} : C \in \mathfrak{a} \rangle$ das Erzeugnis aller $\Gamma_{C\mathfrak{a}}$, so ist $\Gamma_\mathfrak{a}$ halbregulär auf den Punkten von $\mathfrak{R} - \mathfrak{a}$.*

Beweis. Ist $1 \neq \sigma \in \Gamma_\mathfrak{a}$, dann ist $\sigma = \prod_{i=1}^{r} \sigma_i$, wobei jedes der σ_i ein Zentrum C_i besitzt. Wegen Hilfssatz 9 kann man annehmen, daß $C_i \neq C_j$ ist für $i \neq j$. Außerdem kann man annehmen, daß $\sigma_1 \neq 1$ ist. Sei $P \notin \mathfrak{a}$ und $P^\sigma = P$. Nach Hilfssatz 9 ist nun $\sigma\sigma_1 = \sigma_1\sigma$. Also ist $(P^{\sigma_1})^\sigma = P^{\sigma_1}$. Wegen $\sigma_1 \neq 1$ ist $P^{\sigma_1} \neq P$. σ besitzt also die beiden Zentren P und P^{σ_1}. Nach Satz 2 ist also $\sigma = 1$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. σ hat also außerhalb $\mathfrak{a}$ keinen Fixpunkt und folglich ist $\Gamma_\mathfrak{a}$, da $\sigma \neq 1$ beliebig gewählt war, halbregulär.

Hilfssatz 11. *σ, τ seien zwei axiale Automorphismen mit der Achse $\mathfrak{a}$. Das Zentrum von σ sei C und das von τ sei D. Hat nun $\sigma\tau$ ein Zentrum F, so ist $F \in CD$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $C \neq D$ und $\tau \neq 1$ ist. Angenommen, es sei $F \notin CD$, dann gibt es einen Block $\mathfrak{b}$ mit $F \notin \mathfrak{b}$ und

$C, D \in \mathfrak{b}$. Es ist $\mathfrak{b}^{\sigma\tau} = \mathfrak{b}^{\tau} = \mathfrak{b}$. Nach Hilfssatz 5 ist $\mathfrak{b}$ Achse von $\sigma\tau$. Sei nun $C, D \in \mathfrak{a}$. Nach Hilfssatz 10 liegt dann auch F auf $\mathfrak{a}$. Ferner ist $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ wegen $F \notin \mathfrak{b}$. Der Automorphismus $\sigma\tau$ hat also die beiden Achsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Also ist $\sigma\tau = 1$. Dann ist aber $\tau = \sigma^{-1}$ und τ hat folglich die beiden Zentren C und D, woraus $\tau = 1$ folgt im Widerspruch zu unserer Annahme. Also liegt F in diesem Falle auf CD. Einer der beiden Punkte C und D möge nun nicht auf $\mathfrak{a}$ liegen. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ ist, und wir erhalten denselben Widerspruch wie oben.

Satz 4. *Besitzen alle axialen Automorphismen mit der Achse $\mathfrak{a}$ ein Zentrum, so ist* $\Gamma_{\mathfrak{a}} = \bigcup_{C \in \mathfrak{a}} \Gamma_{C\mathfrak{a}}$.

Beweis. Es ist gewiß $\Gamma_{\mathfrak{a}} \supseteqq \bigcup_{C \in \mathfrak{a}} \Gamma_{C\mathfrak{a}}$. Ferner ist $1 \in \bigcup_{C \in \mathfrak{a}} \Gamma_{C\mathfrak{a}}$. Sei also $1 \neq \sigma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, dann ist σ axial mit der Achse $\mathfrak{a}$. Ferner hat σ wegen der Halbregularität von $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ keinen Fixpunkt außerhalb $\mathfrak{a}$. Nach Voraussetzung ist σ zentral. Das Zentrum C von σ muß also auf $\mathfrak{a}$ liegen. Daraus folgt $\sigma \in \Gamma_{C\mathfrak{a}}$, woraus wiederum $\Gamma_{\mathfrak{a}} \subseteqq \bigcup_{C \in \mathfrak{a}} \Gamma_{C\mathfrak{a}}$ folgt, w. z. b. w.

Anmerkung. Ist $1 \neq \sigma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, so folgt aus Hilfssatz 8, daß σ in genau einem $\Gamma_{C\mathfrak{a}}$ liegt. Die Menge der $\Gamma_{C\mathfrak{a}}$ bilden also eine Partition von $\Gamma_{\mathfrak{a}}$.

Satz 5. *Es mögen wieder alle Automorphismen mit der Achse $\mathfrak{a}$ ein Zentrum besitzen. Ist ferner $C \neq D$ und $C, D \in \mathfrak{a}$ und $\Gamma_{C\mathfrak{a}} > 1 < \Gamma_{D\mathfrak{a}}$, so ist $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ abelsch, und zwar entweder eine elementarabelsche p-Gruppe oder jedes Element $(\neq 1)$ hat unendliche Ordnung.*

Der Beweis verläuft genauso wie der Beweis von Lemma 1.2 in Gleason [6].

4. Der Hauptsatz. Wir werden in diesem Abschnitt einen Satz beweisen, der die endlichen projektiven Räume der Dimension $d \geqq 3$ unter den λ-Räumen kennzeichnet und auf den alle folgenden Kennzeichnungen zurückgeführt werden.

Satz 6. *$\mathfrak{R}$ sei ein λ-Raum mit $\lambda > 1$. Es ist $\mathfrak{R}$ genau dann ein endlicher projektiver Raum der Dimension $d \geqq 3$ mit den Blöcken als Hyperebenen, wenn $\mathfrak{R}$ einen Block $\mathfrak{a}$ mit folgenden Eigenschaften enthält:*

(1) *Alle axialen Automorphismen von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{a}$ als Achse sind zentral.*

(2) *$\Gamma_{\mathfrak{a}}$ ist transitiv auf den Punkten von $\mathfrak{R} - \mathfrak{a}$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ ein endlicher projektiver Raum mit $d \geqq 3$, so erfüllt $\mathfrak{R}$ die Bedingungen des Satzes. Sei also $\mathfrak{R}$ ein λ-Raum mit $\lambda > 1$, der die Bedingungen des Satzes erfüllen möge.

a) Ist g eine Gerade von $\mathfrak{R}$, dann ist $g \cap \mathfrak{a} \neq \varnothing$. Angenommen, es wäre $g \cap \mathfrak{a} = \varnothing$, dann gibt es zwei verschiedene Punkte $A, B \in g$ und wegen (2) ein $\sigma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$ mit $A^{\sigma} = B$. Nach (1) hat σ ein Zentrum $C \in \mathfrak{a}$. Andererseits sind A, B, C nach Hilfssatz 4 kollinear. Daraus folgt $C \in g \cap \mathfrak{a}$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist stets $g \cap \mathfrak{a} \neq \varnothing$.

b) Es ist $o(\Gamma_{C\mathfrak{a}}) < \lambda$ für alle $C \in \mathfrak{a}$, denn wegen der Halbregularität von $\Gamma_{C\mathfrak{a}}$ gilt $o(\Gamma_{C\mathfrak{a}}) \leqq |g| - 1$ für alle Geraden g durch C, die nicht in $\mathfrak{a}$ liegen.

c) $\mathfrak{R}$ ist endlich. Es genügt zu zeigen, daß k endlich ist. Wäre nämlich $\mathfrak{R}$ unendlich und $\mathfrak{b}$ ein Block von $\mathfrak{R}$, so wäre die Anzahl der Punkte auf $\mathfrak{b}$, da es unendlich viele

Blöcke gibt und jeder von $\mathfrak{b}$ verschiedene Block diesen in endlich vielen Punkten schneidet und andererseits der Durchschnitt zweier Blöcke nicht in unendlich vielen Blöcken liegen kann, auch unendlich. Sei nun $Q \in \mathfrak{R} - \mathfrak{a}$. Ordnen wir jedem Punkt $P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{a}$ das Element $\sigma_P \in \Gamma_\mathfrak{a}$ zu, welches Q auf P abbildet, so ist dies wegen der Regularität von $\Gamma_\mathfrak{a}$ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{R} - \mathfrak{a}$ auf $\Gamma_\mathfrak{a}$. Sei nun $\mathfrak{b}$ ein Block von $\mathfrak{R}$ und $Q \in \mathfrak{b}$. Sei ferner $Q \neq P \in \mathfrak{b}$. Der Automorphismus σ_P habe das Zentrum X, dann sind Q, P, X kollinear und folglich $X \in \mathfrak{b}$. Jedem Punkt $P \in \mathfrak{b}$ mit $P \neq Q$ wird also ein Element $\sigma_P \in \Gamma_{X\mathfrak{a}}$ zugeordnet mit $X \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und umgekehrt. Also ist $k = |\mathfrak{b}| = \sum [o(\Gamma_{X\mathfrak{a}}) - 1] + 1 + \lambda$, wobei über alle $X \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ zu summieren ist. Wegen b) ist dann also $k < \lambda(\lambda - 1) + 1 + \lambda < \infty$.

d) Die Gruppe $\Gamma_{C\mathfrak{a}}$ ist transitiv auf den Punkten von $g - \{C\}$ jeder Geraden g mit $C \in g$ und $g \not\subset \mathfrak{a}$. Sind nämlich A und B zwei Punkte von $g - \{C\}$, dann gibt es ein $\sigma \in \Gamma_\mathfrak{a}$ mit $A^\sigma = B$. Das Zentrum von σ liegt, wie wir wissen, auf der Geraden g, woraus $\sigma \in \Gamma_{C\mathfrak{a}}$ folgt.

e) Es ist $|g| = 2 + (n - 1)/\lambda$ für jede Gerade g von $\mathfrak{R}$. Wir zeigen zunächst, daß jede Gerade von $\mathfrak{R}$, die nicht in $\mathfrak{a}$ liegt, mit jedem Block von $\mathfrak{R}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat. Angenommen, es gäbe eine Gerade g mit $g \not\subset \mathfrak{a}$ und einen Block $\mathfrak{b}$ mit $g \cap \mathfrak{b} = \emptyset$. Wegen a) ist dann $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$. Es gibt also einen Punkt $Q \in \mathfrak{b} - (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$. Sei $P \in g$ und $\sigma \in \Gamma_\mathfrak{a}$ mit $P^\sigma = Q$. Das Zentrum von σ liegt nicht in $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$, da sonst $P \in \mathfrak{b}$ wäre. Sei $Q \neq Q' \in \mathfrak{b} - (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$ und $P^{\sigma'} = Q'$. Das Zentrum von σ' ist verschieden von dem Zentrum von σ, da sonst P, Q, Q' kollinear wären und P dann auf $\mathfrak{b}$ läge. Durchläuft nun Q die Menge der Punkte von $\mathfrak{b} - (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$, so durchläuft wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{R}$ das Zentrum von σ alle Punkte von $\mathfrak{a} - (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$. Nun ist $g \cap \mathfrak{a}$ wegen a) und $g \not\subset \mathfrak{a}$ ein Punkt C. Es gibt also ein $\sigma \in \Gamma_{C\mathfrak{a}}$ mit $P^\sigma \in \mathfrak{b}$. Wegen der Kollinearität von C, P, P^σ ist also $P^\sigma = g \cap \mathfrak{b}$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Jede Gerade $g \not\subset \mathfrak{a}$ hat also mit jedem Block von $\mathfrak{R}$ einen nichtleeren Durchschnitt. Durch jeden Punkt von g gehen nun genau $k - \lambda = n$ Blöcke von $\mathfrak{R}$, die mit g nur diesen einen Punkt gemeinsam haben. Daraus folgt $|g|\, n = v - \lambda = n[2 + (n-1)/\lambda]$. Also ist $|g| = 2 + (n-1)/\lambda$ für jede Gerade g mit $g \not\subset \mathfrak{a}$. Hieraus und aus d) folgt, daß $q = o(\Gamma_{C\mathfrak{a}}) = 1 + (n - 1)/\lambda$ ist für alle $C \in \mathfrak{a}$.

Für jede Gerade eines jeden λ-Raumes gilt $|g|\, n \leqq v - \lambda$. Ferner gilt in unserem Falle wegen Hilfssatz 11, daß $\Gamma_{C\mathfrak{a}} \otimes \Gamma_{D\mathfrak{a}} \subseteqq \bigcup_{E \in CD} \Gamma_{E\mathfrak{a}}$ ist. Ist also $g \subset \mathfrak{a}$ und $C, D \in g$, so folgt $q^2 \leqq |g|\,(q - 1) + 1 \leqq (q + 1)\,(q - 1) + 1 = q^2$, woraus $|g| = q + 1 = 2 + (n - 1)/\lambda$ folgt.

Nach Dembowski und A. Wagner [5] folgt nun aus e) die Behauptung von Satz 6.

5. In diesem Abschnitt werden wir einige gruppentheoretische Überlegungen durchführen, die uns im folgenden nützlich sein werden.

Satz 7. *Ist Γ eine halbreguläre, endliche Permutationsgruppe über $\mathfrak{A}$ und sind $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ Untergruppen von Γ mit den Eigenschaften*
(a) *$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ bilden eine Partition von Γ,*
(b) *$o(\Gamma_i) = h > 1$ für $i = 1, 2, \ldots, k$, $k > 1$,*
(c) *$k(k-1)$ teilt $|\mathfrak{A}| + k - 1$,*
so ist Γ transitiv auf $\mathfrak{A}$.

Beweis. Es ist $o(\Gamma) = g = k(h-1)+1$ wegen (a) und (b). Setzt man $n = |\mathfrak{A}|$, dann folgt aus der Halbregularität von Γ, daß es eine natürliche Zahl m gibt mit

$$(1) \qquad mg = m[k(h-1)+1] = n.$$

Aus (c) folgt die Existenz einer natürlichen Zahl r, so daß

$$(2) \qquad n = r^{-1}(k-1)(k-r)$$

ist. Aus (1) und (2) folgt

$$m[k(h-1)+1] = r^{-1}(k-1)(k-r).$$

Hieraus folgt durch eine leichte Rechnung

$$(3) \qquad m = 1 + [r^{-1}(k-1) - 1 - m(h-1)]k.$$

Ist $d = (k, r)$, dann ist rd^{-1} ein Teiler von $k-1$. Mit diesem d formt sich (3) um zu

$$(4) \qquad m = 1 + [r^{-1}d(k-1) - d - md(h-1)]kd^{-1}.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist eine ganze Zahl. Ebenso ist kd^{-1} ganz. Aus (4) folgt also, daß

$$(5) \qquad m \equiv 1 \bmod (kd^{-1})$$

ist.

Nach Voraussetzung ist $1 \leqq h-1$. Daraus folgt

$$(k+1)m \leqq [k(h-1)+1]m = r^{-1}(k-1)(k-r) < kr^{-1}(k-1).$$

Daraus folgt wiederum

$$m < [kr^{-1}(k-1)]/(k+1) = [kd^{-1}dr^{-1}(k-1)]/(k+1) < kd^{-1}.$$

Wir haben also

$$(6) \qquad m < kd^{-1}.$$

Aus (5) und (6) folgt dann, daß $m = 1$ und Γ folglich auf $\mathfrak{A}$ transitiv ist.

$\mathfrak{A}$ sei eine endliche Menge der Länge n. Γ sei eine Permutationsgruppe über $\mathfrak{A}$ vom Grade n und vom Minimalgrade $n-1$. Ferner mögen die Elemente von Γ vom Grade n zusammen mit der Identität eine Gruppe $\tilde{\Gamma}$ bilden, die dann natürlich halbregulär ist. $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ seien die Transitivitätsgebiete von Γ. Jedes Transitivitätsgebiet $\mathfrak{P}_i$ zerfällt dann in Transitivitätsgebiete $\mathfrak{T}_{ij}$ von $\tilde{\Gamma}$, die wegen der Halbregularität von $\tilde{\Gamma}$ alle die Länge $t = o(\tilde{\Gamma})$ haben. Ist tt_i gleich der Länge von $\mathfrak{P}_i$, dann ist

$$(7) \qquad n = t\sum_{i=1}^{r} t_i.$$

Ist $\sigma \in \Gamma$ ein Element vom Grade $n-1$, dann sind auch alle seine Konjugierten vom Grade $n-1$. Daraus folgt, daß die Anzahl der Elemente von Γ mit dem Fixelement $C \in \mathfrak{P}_i$ nur von i abhängt. Diese Anzahl werde mit s_i bezeichnet. Für die Ordnung $m = o(\Gamma)$ gilt dann

$$(8) \qquad m = t + t \sum_{i=1}^{r} t_i (s_i - 1).$$

Bezeichnet man mit Γ_C die Gruppe aller Elemente von Γ, die das Element $C \in \mathfrak{P}_i$ festlassen, dann ist Γ_C sein eigener Normalisator, falls $o(\Gamma_C) > 1$ ist. Daraus folgt, daß, falls $s_i > 1$ ist, der Index $m s_i^{-1}$ von Γ_C in Γ gleich der Anzahl aller $\sigma \Gamma_C \sigma^{-1}$ ist, wobei σ ganz Γ durchläuft. Nun ist $\sigma \Gamma_C \sigma^{-1} = \Gamma_{C^\sigma}$. Daraus folgt $m s_i^{-1} = t t_i$ oder

$$(9) \qquad m = t t_i s_i .$$

Diese Gleichung gilt auch, falls $s_i = 1$ ist, denn dann folgt aus $C^{\sigma'} = C^{\sigma}$, daß $\sigma' \sigma^{-1} \in \in \Gamma_C = 1$, also $\sigma = \sigma'$ ist. $\sigma \to C^{\sigma}$ ist folglich eine eineindeutige Abbildung von Γ auf $\mathfrak{P}_i$. Aus (7), (8) und (9) folgt nun

$$(10) \qquad m = t + rm - n$$

oder

$$(11) \qquad (r-1)m = n - t.$$

Wir haben also bewiesen den

Satz 8. *Γ ist genau dann transitiv auf $\mathfrak{A}$, falls $\tilde{\Gamma}$ transitiv auf $\mathfrak{A}$ ist.*

Satz 9. *Die Fixelemente der Permutationen vom Grade $n - 1$ liegen in ein und demselben Transitivitätsgebiet von $\tilde{\Gamma}$.*

Beweis. Ist $r = 1$, so folgt dies aus Satz 8. Sei also $r > 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$(12) \qquad s_1, \ldots, s_l > 1, \; s_{l+1} = \ldots = s_r = 1 \quad \text{und} \quad l \geqq 1$$

gilt. Aus (9) und (11) folgt

$$(13) \qquad s_i t_i = m t^{-1} = (n t^{-1} - 1)/(r - 1).$$

Aus (12) und (13) folgt

$$\sum_{j=1}^{l} s_j^{-1} + (r - l) = \sum_{j=1}^{r} s_j^{-1} = (r-1)\,(n t^{-1} - 1)^{-1} \sum_{j=1}^{r} t_j .$$

Nach (7) gilt dann

$$\sum_{j=1}^{l} s_j^{-1} + (r - l) = (r-1)\,(n t^{-1} - 1)^{-1}\, n t^{-1} > r - 1 .$$

Wegen $s_i \geqq 2$ für $i = 1, \ldots, l$ folgt

$$(r - l)/2 = l/2 + r - l \geqq \sum_{j=1}^{l} s_j^{-1} + (r - l) > r - 1.$$

Hieraus folgt $l/2 > l - 1$, was wiederum $l = 1$ nach sich zieht. Also ist $s_2 = \ldots = s_r = 1$. Aus (8) und (9) folgt dann

$$m = t + t t_1 (s_1 - 1) = t + m - t t_1 .$$

Wegen $t > 0$ folgt dann $t_1 = 1$, w. z. b. w.

Der Satz 9 ist im wesentlichen bereits bekannt. Vergleiche z. B. PICKERT [7] Satz 35, S. 313.

6. In diesem Paragraphen geben wir noch einige weitere Kennzeichnungen von endlichen projektiven Räumen. Dabei werden wir einmal voraussetzen, daß $\mathfrak{R}$ ein endlicher λ-Raum sei, und zum andern werden wir, ähnlich wie in der Arbeit [9] von A. WAGNER, die Existenz von gewissen nichttrivialen zentralen Automorphismen fordern, die die Transitivität von $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ zur Folge haben, so daß dann aus Satz 6 folgt, daß $\mathfrak{R}$ ein projektiver Raum ist.

Satz 10. *$\mathfrak{R}$ sei ein endlicher λ-Raum mit $\lambda > 1$. Genau dann ist $\mathfrak{R}$ ein endlicher projektiver Raum der Dimension $d \geqq 3$ mit den Blöcken als Hyperebenen, wenn $\mathfrak{R}$ einen Block $\mathfrak{a}$ mit folgenden Eigenschaften enthält:*
(1) *Alle axialen Automorphismen mit $\mathfrak{a}$ als Achse sind zentral und alle zentralen Automorphismen mit einem Zentrum auf $\mathfrak{a}$ sind axial.*
(2) *Es ist $\Gamma_{C\mathfrak{b}} > 1$ für alle Paare C, $\mathfrak{b}$ mit $C \in \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ ein endlicher projektiver Raum mit $d \geqq 3$, so kann man $\mathfrak{R}$, wie bereits erwähnt, als λ-Raum auffassen, indem man nur die Hyperebenen und die Punkte von $\mathfrak{R}$ und die zwischen ihnen erklärte Inzidenz betrachtet. (1) und (2) sind erfüllt, wenn man für $\mathfrak{a}$ irgendeine Hyperebene von $\mathfrak{R}$ nimmt, da $d \geqq 3$ vorausgesetzt ist. Sei also $\mathfrak{R}$ ein λ-Raum, der die Bedingungen des Satzes erfüllt. Sei ferner g eine Gerade, die in $\mathfrak{a}$ liegen möge. A sei die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{R}$, die $\mathfrak{a}$ fest lassen. A_g sei die Untergruppe von A, die g fest läßt. Sei $P \in g$ und $\mathfrak{p}$ ein Block mit $P = g \cap \mathfrak{p}$. Sei $1 \neq \sigma \in \Gamma_{P\mathfrak{p}}$. Nach dem zu Satz 5 dualen Satz ist $\sigma^p = 1$ für eine Primzahl p. Ferner ist $\sigma \in \mathsf{A}_g$ und σ hat außer P keine weiteren Fixpunkte auf g. Nach GLEASON [6] Lemma 1.7 ist A_g, da $P \in g$ beliebig gewählt war, transitiv auf g. (Man überlegt sich leicht, daß die Primzahl p unabhängig ist von der Auswahl von P auf g.) Da durch zwei Punkte stets eine Gerade geht, ist folglich A transitiv auf den Punkten von $\mathfrak{a}$. Ist nun $\alpha \in \mathsf{A}$, dann ist $\Gamma_{C\mathfrak{a}}^{\alpha} = \Gamma_{C^{\alpha}\mathfrak{a}^{\alpha}} = \Gamma_{C^{\alpha}\mathfrak{a}}$. Hieraus und aus der Transitivität von A auf $\mathfrak{a}$ folgt, daß $o(\Gamma_{C\mathfrak{a}}) = h > 1$ ist, da ja 2) gelten sollte. Nun erfüllen die Gruppen $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ und $\Gamma_{C\mathfrak{a}}$ die Voraussetzungen des Satzes 7, wenn man für $\mathfrak{A}$ die Menge der Punkte von $\mathfrak{R} - \mathfrak{a}$ nimmt. $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ ist folglich transitiv auf den Punkten von $\mathfrak{R} - \mathfrak{a}$ und die Behauptung unseres Satzes folgt nun aus Satz 6.

Satz 11. *$\mathfrak{R}$ sei ein endlicher λ-Raum mit $\lambda > 1$. $\mathfrak{R}$ ist genau dann ein endlicher projektiver Raum der Dimension $d \geqq 3$ mit den Blöcken als Hyperebenen, wenn $\mathfrak{R}$ folgende Eigenschaften besitzt:*
(1) *Alle axialen Automorphismen sind zentral und alle zentralen Automorphismen sind axial.*
(2) *Zu jedem $C \in \mathfrak{R}$ gibt es λ verschiedene Blöcke $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{\lambda}$ mit $C \in \mathfrak{b}_i$ und $\Gamma_{C\mathfrak{b}_i} > 1$ für $i = 1, \ldots, \lambda$.*
(3) *Zu jedem Block $\mathfrak{c} \in \mathfrak{R}$ gibt es ein D mit $D \in \mathfrak{c}$ und $\Gamma_{D\mathfrak{c}} > 1$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ ein endlicher projektiver Raum mit $d \geqq 3$, dann sind bekanntlich alle Bedingungen des Satzes erfüllt. Sei also $\mathfrak{R}$ ein endlicher λ-Raum mit $\lambda > 1$, der die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen möge. Falls wir zeigen können, daß

$\Gamma_{X\mathfrak{x}} > 1$ ist für alle Paare X, $\mathfrak{x}$ mit $X \in \mathfrak{x}$, dann folgt aus Satz 10, daß auch Satz 11 richtig ist.

Angenommen es sei $P \in \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{d} \in \mathfrak{R}$ mit $P \in \mathfrak{d}$ und $\Gamma_{P\mathfrak{d}} = 1$. Nach (3) gibt es ein $D \in \mathfrak{d}$ mit $\Gamma_{D\mathfrak{d}} > 1$. Nach (2) gibt es λ Blöcke $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\lambda$ durch P mit $\Gamma_{P\mathfrak{b}_i} > 1$. Diese können nicht alle durch D gehen, da sonst $\Gamma_{P\mathfrak{d}} > 1$ wäre. Sei z. B. $D \notin \mathfrak{b}_1$. Außerdem seien $D = D_1, D_2, \ldots, D_s$ alle Punkte auf DP mit $D_i \neq D_k$ für $i \neq k$ und $\Gamma_{D_i\mathfrak{d}} > 1$. Ferner seien $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_t$ alle Blöcke mit $\mathfrak{r}_i \neq \mathfrak{r}_k$ für $i \neq k$ und $\Gamma_{P\mathfrak{r}_i} > 1$ und $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{d} \cap \mathfrak{r}_i$ für $i = 1, \ldots, t$. Sei ferner $1 \neq \tau \in \Gamma_{P\mathfrak{r}_1}$ und $1 \neq \sigma_i \in \Gamma_{D_i\mathfrak{d}}$. Nun ist $\sigma_i \tau \sigma_i^{-1}$ ein Automorphismus mit dem Zentrum P und der Achse $\mathfrak{r}_1^{\sigma_i}$. Wegen $D_i \notin \mathfrak{r}_1$ ist $\mathfrak{r}_1 \neq \mathfrak{r}_1^{\sigma_i}$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_1^{\sigma_i}$ bleibt nun unter σ_i punktweise fest (Hilfssatz 6). Hieraus und aus der Endlichkeit von λ folgt $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_1^{\sigma_i} = \mathfrak{d} \cap \mathfrak{r}_1^{\sigma_i}$. Also ist $\mathfrak{r}_1^{\sigma_i} = \mathfrak{r}_u$ mit $2 \leq u \leq t$.

Sei $\mathfrak{r}_1^{\sigma_i} = \mathfrak{r}_1^{\sigma_j}$ mit $i \neq j$. Daraus folgt $\mathfrak{r}_1^{\sigma_i \sigma_j^{-1}} = \mathfrak{r}_1$. Das Zentrum E von $\sigma_i \sigma_j^{-1}$ liegt also auf $\mathfrak{r}_1$. Andererseits liegt E nach Hilfssatz 11 auch auf $D_i D_j = D_1 P$. Daraus folgt $E = D_1 P \cap \mathfrak{r}_1 = P$ und $\Gamma_{P\mathfrak{d}} > 1$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist $\mathfrak{r}_1^{\sigma_i} \neq \mathfrak{r}_1^{\sigma_j}$, falls $i \neq j$ ist. Es ist also jedem Punkt D_i eineindeutig ein Block $\mathfrak{r}_u$ mit $2 \leq u \leq t$ zugeordnet. Daraus folgt $s < t$. Analog zeigt man $t < s$. Unsere Annahme ist also falsch und folglich $\Gamma_{X\mathfrak{x}} > 1$ für alle X, $\mathfrak{x}$ mit $X \in \mathfrak{x}$, woraus, wie gezeigt, die Behauptung des Satzes folgt.

Zum Schluß dieses Abschnitts geben wir noch eine Kennzeichnung der endlichen projektiven Räume über einem Galoisfeld, welches von dem Primkörper der Charakteristik 2 verschieden ist. Es gilt nämlich folgender

Satz 12. *$\mathfrak{R}$ sei ein endlicher λ-Raum mit $\lambda > 1$. Genau dann ist $\mathfrak{R}$ ein endlicher projektiver Raum mit $d \geq 3$ über einem von $GF(2)$ verschiedenen Galoisfeld, wenn $\mathfrak{R}$ einen Block $\mathfrak{a}$ mit folgenden Eigenschaften enthält:*

(1) *Alle axialen Automorphismen mit der Achse $\mathfrak{a}$ sind zentral.*

(2) *Zu jedem $P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{a}$ gibt es eine nichttriviale Streckung mit dem Zentrum P und der Achse $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ ein endlicher projektiver Raum mit $d \geq 3$ und $\mathfrak{a}$ eine Hyperebene von $\mathfrak{R}$, so besitzt $\mathfrak{a}$ sicherlich die Eigenschaft (1). Es ist nun (2) genau dann erfüllt, wenn der Koordinatenkörper, der zu $\mathfrak{R}$ gehört, mehr als zwei Elemente besitzt, da die Gruppe der Streckungen mit festem Zentrum und fester Achse bekanntlich zur multiplikativen Gruppe des Koordinatenkörpers isomorph ist. Es ist also nur noch zu zeigen, daß ein endlicher λ-Raum, der einen Block $\mathfrak{a}$ mit den Eigenschaften (1) und (2) enthält, ein projektiver Raum ist.

Γ sei die Gruppe, die von allen axialen Automorphismen von $\mathfrak{R}$, die die Achse $\mathfrak{a}$ besitzen, erzeugt wird. Γ besteht nur aus axialen Automorphismen, da das Produkt zweier axialer Automorphismen mit gleicher Achse wieder axial ist. Faßt man Γ als Permutationsgruppe über $\mathfrak{R} - \mathfrak{a}$ auf, dann hat Γ folglich den Grad $v - k$ und den Minimalgrad $v - k - 1$. Aus Bedingung (1) und Hilfssatz 10 folgt, daß die Menge $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{\mathfrak{a}}$ der Translationen eine Untergruppe von Γ bilden. Wir können also auf Γ und $\tilde{\Gamma}$ den Satz 9 anwenden. Aus diesem Satz nun folgt nun zusammen mit der Bedingung (2), daß $\tilde{\Gamma}$ auf den Punkten von $\mathfrak{R} - \mathfrak{a}$ transitiv ist, woraus nach Satz 6 folgt, daß $\mathfrak{R}$ ein projektiver Raum ist.

7. Es bleibt noch zu diskutieren, was die Sätze 6, 10, 11 und 12 im Falle $\lambda = 1$ aussagen. Ist also $\mathfrak{R}$ ein λ-Raum mit $\lambda = 1$, so ist $\mathfrak{R}$ eine projektive Ebene. Nennt man nämlich die Blöcke Geraden (diese Geraden sind mit den am Ende des Abschnitts 1 definierten Geraden identisch), dann gilt: Zwei verschiedene Geraden haben genau einen Schnittpunkt. Zwei verschiedene Punkte haben genau eine Verbindungsgerade, und wegen $\lambda + 2 \leq k$ liegen auf jeder Geraden mindestens drei Punkte bzw. gehen durch jeden Punkt mindestens drei Geraden. Ist umgekehrt $\mathfrak{R}$ eine projektive Ebene, so ist $\mathfrak{R}$ ein λ-Raum mit $\lambda = 1$.

Die Voraussetzungen der fraglichen Sätze werden nun nicht von allen projektiven Ebenen erfüllt. Es erhebt sich also die Frage, welche Typen von projektiven Ebenen durch diese Sätze charakterisiert werden. Satz 6 ist in diesem Falle nicht sonderlich interessant, da die Bedingung (2) nach André [1] Definition 6 gerade die Definition der Translationsebenen ist.

Satz 10 charakterisiert unter den endlichen Translationsebenen diejenigen, die als Ternärkörper einen Linksalternativkörper besitzen. Daß die Bedingung (2) notwendig ist, folgt aus André [2] Satz 4. Andererseits überlegt man sich leicht, daß aus der $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$-Transitivität und aus Bedingung (2) die (C, C)-Transitivität für alle $C \in \mathfrak{a}$ folgt, was für die Ebenen über einem Linksalternativkörper nach André [2] Satz 4 kennzeichnend ist.

Satz 11 kennzeichnet unter den endlichen projektiven Ebenen nach A. Wagner [9] gerade die desarguesschen Ebenen.

Bleibt noch Satz 12. Nach André [1] ist jeder Translationsebene ein Körper K invariant zugeordnet. Ferner weiß man nach [1], daß die Gruppe der Streckungen mit dem Zentrum $C \in \mathfrak{R} - \mathfrak{a}$ und der Achse $\mathfrak{a}$ isomorph ist der multiplikativen Gruppe des Körpers K. Satz 12 kennzeichnet also im Falle $\lambda = 1$ gerade die endlichen Translationsebenen mit $K \neq GF(2)$.

Literaturverzeichnis

[1] J. André, Über nicht-desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954).

[2] J. André, Projektive Ebenen über Fastkörpern. Math. Z. **62**, 137—160 (1955).

[3] R. C. Bose, On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. Eug. **2**, 353—399 (1939).

[4] P. Dembowski, Verallgemeinerung von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen. Math. Z. **69**, 59—89 (1958).

[5] P. Dembowski and A. Wagner, Some characterizations of finite projective spaces. Arch. Math. **11**, 465—469 (1960).

[6] A. M. Gleason, Finite Fano planes. Amer. J. Math. **78**, 797—808 (1956).

[7] G. Pickert, Projektive Ebenen. Berlin 1955.

[8] J. A. Todd, A combinatorial problem. J. Math. Phys. **12**, 321—333 (1933).

[9] A. Wagner, On perspectivities of finite projective planes. Math. Z. **71**, 113—123 (1959).

[10] H. Wielandt, Permutationsgruppen. Vorlesungsausarbeitung von J. André, Tübingen 1954.

Eingegangen am 3. 2. 1961

Anschrift des Autors:

Heinz Lüneburg
Mathematisches Seminar der Universität
Frankfurt (Main)

On Projective Planes of Class III

By

JILL C. D. S. YAQUB*)

It is shown in [5], Theorem 9, that the "Moulton" plane, [3], is of Lenz-Barlotti class III 2 ([1], [2]). I here consider a class of "generalized Moulton planes" given by PICKERT [4], and show that some of its members belong to class III 2 and the remainder to class III 1; the question of the existence of planes of the latter class is thus decided. The result was first obtained by direct calculation, at considerable length, and I am indebted to Professor G. PICKERT for suggesting the present proof, in particular the use of the coordinate transformation in Theorem 1, which also furnishes an algebraic equivalent for class III.

We first recall some fundamental definitions. A *projective plane* comprises two disjoint sets, whose elements are *points* and *lines* respectively, together with a relationship "*on*" satisfying the following axioms: (i) on two distinct points there is precisely one line, (ii) on two distinct lines there is precisely one point, (iii) there exist four points no three of which are on the same line. It is well known that such a system need not satisfy Desargues' Theorem on perspective triangles. A *collineation* is a one-one mapping of a plane onto itself which takes points into points, lines into lines and preserves incidence. A $P-l$ *perspectivity* is a collineation which leaves fixed all lines on the point P and all points on the line l. A plane is $P-l$ *transitive*, for given P and l, if and only if for each pair of points X, Y, distinct from P, not on l and collinear with P, there exists a $P-l$ perspectivity mapping X on Y. It can be shown that a plane which is $P-l$ transitive and admits an additional collineation φ is also $\varphi(P)-\varphi(l)$ transitive, and that a plane which is $P-l$ transitive and $Q-l$ transitive for distinct points P and Q is $X-l$ transitive for all points X on the line PQ. A plane is $P-l$ transitive if and only if it satisfies the $P-l$ Desargues' Theorem, namely the specialization of Desargues' Theorem in which P is the centre and l the axis of perspective. (See, for example, [4], Chapter 3.)

LENZ, [2], and BARLOTTI, [1], have classified projective planes according to the figure formed by those point-line pairs (P, l) for which the plane is $P-l$ transitive. Their results exclude many "possible" figures, but do not ensure that there exist planes of each remaining class. We are here concerned with planes of class III 1 and III 2. A plane is *of class* III 1 if and only if, for some point B and for some line b not on B, it admits precisely the transitivity pairs (X, XB) for all X on b; a plane is *of class* III 2 if and only if it admits the transitivity pairs of class III 1 together with

*) Formerly Miss J. C. D. SPENCER.

the single additional pair (B, b). A plane is *of class* III if and only if it is of class III 1 or of class III 2.

I use the coordinate system of [4]. (See [4], pages 31—39.) V, U, O, E denote the vertices of the fundamental coordinate quadrangle. The points P not on VU are represented biuniquely by ordered pairs (x, y) of elements from the derived ternary ring, where x, y are the symbols given to VP, UP respectively; in particular the points O, E have coordinates $(0,0)$, $(1,1)$ respectively. Lines not on V are also represented biuniquely by ordered pairs: the line on O and $(1, m)$ has coordinates $[m, 0]$, while, for $c \neq 0$, the line on $(0, c)$ and $VU \cap [m, 0]$ has coordinates $[m, c]$. The point $VU \cap [m, 0]$ will be denoted by (m). The symbols $\diagdown$, $/$ are defined as follows: if $a \neq 0$, then $x = a \diagdown b$ if and only if $ax = b$ and $y = b / a$ if and only if $ya = b$.

If a given plane Π is of class III, we may choose the fundamental quadrangle $VUOE$ so that $U = B$ and $VO = b$; then if Π is of class III 1 it admits precisely the transitivity pairs (X, XU) for all X on VO, while if Π is of class III 2 it admits the additional pair (U, VO). Conversely, a plane which is $V - VU$ and $O - OU$ transitive is at least of class III 1, since it must admit the transitivity pairs (X, XU) for all X on VO.

A plane is $V - VU$ transitive if and only if the ternary ring with respect to some (or equivalently, to each) quadrangle $VUOE$ is a cartesian group, $\mathfrak{C}$. ([4], page 100.) In general multiplication in $\mathfrak{C}$ is not associative and neither distributive law holds. We first find algebraic conditions for a $V - VU$ transitive plane to be $O - OU$ transitive.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{C}$ denote the cartesian group with respect to a chosen quadrangle $VUOE$ of a $V - VU$ transitive plane. Let $\mathfrak{C}'$ denote the set of non-zero elements of $\mathfrak{C}$ together with the symbol ∞, corresponding to the line UV in the pencil on U. Let the operation $\circ$ be defined on $\mathfrak{C}'$ as follows:*

$$a \circ \infty = \infty \circ a = a,$$
$$a \circ (-a) = \infty \qquad (a \neq \infty),$$
$$a \circ b = a / [b \diagdown (a + b)] \quad (a, b \neq \infty, a + b \neq 0).$$

Then the plane is $O - OU$ transitive if and only if
(i) *the operation $\circ$ is associative,*
(ii) *if u, x, c belong to $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{C}'$, then $u'x = ux - uc$ and $ux = (uc)d$ together imply that $(u'c)d = u'x$.*

Proof. Let $V' = O$, $U' = U$, $O' = V$, $E' \in VE$, $(E' \neq V, \notin OU)$. The coordinates of a point $P, \notin OU, OV$, relative to the new fundamental quadrangle $V'U'O'E'$ are then related to the old coordinates of P by the equations

$$y' = y, \quad x' = y / x; \tag{1}$$

this follows at once from the definition of coordinates ([4], page 31), and the fact that $V'P \cap O'E'$ has the second (old) coordinate y / x. The plane is $V' - V'U'$ transitive, i.e. $O - OU$ transitive, if and only if the new ternary ring, which we denote also by $\mathfrak{C}'$, is a cartesian group. Thus it suffices to find conditions which correspond to the associative law of addition and to the first splitting law in $\mathfrak{C}'$ ([4], p. 100).

Let $\oplus$ denote addition in $\mathfrak{C}'$. Then, since the element ∞, corresponding to $V'O'$, is the unit of the additive loop, $a \oplus \infty = \infty \oplus a = a$ for all a in $\mathfrak{C}'$. By definition, if $c, b \neq 0, \infty$, $c \oplus b$ is the y'-coordinate of the point of intersection of $x' = c$ and $(O, b) \cup (O'E' \cap V'U')$ ([4], p. 38). It is easily verified that this point is on $U'O'$ if $b + c = 0$. Thus $a \oplus (-a) = \infty$ for all $a \neq \infty$ in $\mathfrak{C}'$. If $b, c \neq 0, \infty$ and if $b + c \neq 0$, then $a = c \oplus b$ if and only if for some x

$$a = cx = (-b)c + b.$$

On eliminating x we find that

$$c = a/[(-b)\backslash(a - b)]. \tag{2}$$

Suppose now that the plane is $O - OU$ transitive; then the operation $\oplus$ is associative. Thus if $b, c \neq 0, \infty$ and if $b + c \neq 0$ then $a = c \oplus b$ if and only if $a \oplus (-b) = c$, since $b, -b$ are additive inverses in $\mathfrak{C}'$. It follows from (2), with b replaced by $-b$, that for $a, b \neq 0, \infty$ and $a + b \neq 0$,

$$a \oplus b = a/[b\backslash(a + b)].$$

The operation $\oplus$ is now seen to be identical on $\mathfrak{C}'$ with the abstractly defined operation $\circ$, and it follows that $\circ$ is associative.

Suppose, conversely, that the operation $\circ$ is associative. Then if $a, b \neq 0, \infty$ and if $a \neq b$, $c = a \circ (-b)$ if and only if $c \circ b = a$. Thus if $c, b \neq 0, \infty$ and $c + b \neq 0$, $a = c \circ b$ if and only if

$$c = a/[(-b)\backslash(a - b)].$$

On comparison with (2) we see that the operations $\oplus$, $\circ$ are again identical on $\mathfrak{C}'$, whence $\oplus$ is associative. We have therefore shown that (i) represents the associativity of addition in $\mathfrak{C}'$.

Let $u, c \neq 0, \infty$. The line on the points with coordinates (u), $(c, 0)$ in $\mathfrak{C}$ meets OV in $(0, -uc)$. By (1), the line $x = c$ in $\mathfrak{C}$ corresponds to $x' = y'/c$, i.e. to $y' = x'c$, in $\mathfrak{C}'$. Thus the first splitting law holds in $\mathfrak{C}'$ if and only if $y = ux - uc$ is equivalent to $y' = (x'c) \oplus (-uc)$. In this case, for $x \neq 0$, $y = ux - uc$ implies

$$y \circ (uc) = (y/x)c,$$

i.e.

$$y/[uc\backslash(y + uc)] = (y/x)c,$$

i.e.

$$y/[uc\backslash ux] = (y/x)c.$$

Let $y/x = u'$, $uc\backslash ux = d$. Then $y = u'x$, $ux = (uc)d$, and we see that the first splitting law holds in $\mathfrak{C}'$ if and only if (ii) is satisfied. This completes the proof of Theorem 1.

We note that (i) is easily shown to be equivalent to the condition given in [5], Theorem 8, if multiplication is associative; in this case (ii) is trivially satisfied.

The following class of cartesian groups has been given by Pickert ([4], p. 93). Let $\mathfrak{S}$ be an ordered skew-field, and let "addition" be the addition of $\mathfrak{S}$. Let "multiplication", $\times$, be defined in terms of the multiplication in $\mathfrak{S}$ as follows:

$$a \times b = a\,b \text{ unless } a < 0, b < 0,$$
$$= a\,k\,b \text{ if } a < 0, b < 0,$$

where k, $\neq 1$, is a fixed positive element in $\mathfrak{S}$. It may be verified that these operations define a cartesian group, $\mathfrak{C}$, in which neither distributive law holds. The corresponding planes, which we shall call "generalized Moulton planes", are of Lenz class II or III ([4], pp. 94, 108) and are certainly of class III if they are $O - OU$ transitive.

Theorem 2. *Generalized Moulton planes are $O - OU$ transitive.*

Proof. It is sufficient to verify that the defining cartesian groups $\mathfrak{C}$ satisfy the conditions of Theorem 1. We note first that $c/d = cd^{-1}$, $d\backslash c = d^{-1}c$ unless $c > 0$, $d < 0$, while $c/d = cd^{-1}k^{-1}$, $d\backslash c = k^{-1}d^{-1}c$ if $c > 0, d < 0$.

In order to verify (i), we consider the expression $a \circ b$ in $\mathfrak{C}$. $b\backslash(a+b) = k^{-1} \cdot b^{-1}(a+b)$ only if $a + b > 0$, $b < 0$. In this case $a > 0$ and $b\backslash(a+b) < 0$, so that $a \circ b = a[b\backslash(a+b)]^{-1}k^{-1} = a(a+b)^{-1}b$. Moreover $a > 0$, $b\backslash(a+b) < 0$ only if $a + b > 0$, $b < 0$. In all other cases the evaluation of $a \circ b$ does not involve k. Thus $a \circ b = a(a+b)^{-1}b$ for all $a, b \neq 0$, $a + b \neq 0$, so that the expression has the same value in $\mathfrak{C}$ as in $\mathfrak{S}$. But (i) is certainly satisfied by $\mathfrak{S}$, so that it is also satisfied by $\mathfrak{C}$.

In order to verify (ii), we consider all sign combinations of u, c, x. If $x > 0$, $c > 0$, then $d = c^{-1}x > 0$, and therefore

$$(u' \times c) \times d = u'cd = u' \times x.$$

If $x > 0$, $c < 0$, $u > 0$, then

$$d = k^{-1}c^{-1}x < 0, \quad u' = (ux - uc)x^{-1} > 0,$$

and $(u' \times c) \times d = u'ckd = u' \times x$. If $x > 0$, $c < 0$, $u < 0$, then

$$d = c^{-1}k^{-1}x < 0, \quad u' = (ux - ukc)x^{-1} < 0,$$

so that $(u' \times c) \times d = u'kcd = u' \times x$. If $x < 0$, $c > 0$, $u > 0$, the calculation again does not involve k. If $x < 0$, $c > 0$, $u < 0$, then

$$d = k^{-1}c^{-1}kx < 0, \quad u' = (ukx - uc)x^{-1}k^{-1} < 0,$$

whence $(u' \times c) \times d = u'ckd = u' \times x$. If $x < 0$, $c < 0$, $u > 0$, then $d = c^{-1}x > 0$ and either $u' = (ux - uc)x^{-1}k^{-1} < 0$ or $u' = (ux - uc)x^{-1} > 0$ or $u' = 0$; in all three cases

$$(u' \times c) \times d = ux - uc = u' \times x.$$

Finally, if $x < 0$, $c < 0$, $u < 0$, then $d = c^{-1}x > 0$, and either

$$u' = (ukx - ukc)x^{-1}k^{-1} < 0 \quad \text{or} \quad u' = (ukx - ukc)x^{-1} > 0 \quad \text{or} \quad u' = 0;$$

therefore $(u' \times c) \times d = u' \times x$ in the case $u' < 0$ as well as in the case $u' \geqq 0$. This completes the proof of Theorem 2.

As we have noted, Theorem 2 implies that all generalized Moulton planes are of class III. We now distinguish between those of class III 1 and those of class III 2.

Theorem 3. *A generalized Moulton plane is of class* III 2 *if in the definition of* $\mathfrak{C}$ *the element* k *is in the centre of the skew-field* $\mathfrak{S}$, *and is otherwise of class* III 1.

Proof. A generalized Moulton plane is of class III 2 if it is $U - OV$ transitive, and is otherwise of class III 1. In a plane over a cartesian group, (for which the first splitting law necessarily holds), $U - OV$ transitivity is equivalent to the associative law of multiplication ([4], p. 102). It is therefore sufficient to show that multiplication in $\mathfrak{C}$ is associative if and only if k is in the centre of $\mathfrak{S}$.

Suppose first that k is in the centre of $\mathfrak{S}$. Let $n(a, b, c)$ denote the number of positive elements among a, b, c. Then, since k commutes with all elements,

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) = (a \times b) \times c &= abc \quad \text{if } n(a, b, c) < 2, \\ &= kabc \text{ if } n(a, b, c) \geqq 2. \end{aligned}$$

Hence multiplication is associative.

Suppose, on the other hand, that k is not in the centre of $\mathfrak{S}$. Then there exists an element a in $\mathfrak{S}$ such that $ka \neq ak$. Since this implies that $k(-a) \neq (-a)k$, there is no loss of generality in taking $a < 0$. Then

$$(-1) \times [a \times (-1)] = (-1) \times (-ak) = ak,$$

while

$$[(-1) \times a] \times (-1) = (-ka) \times (-1) = ka.$$

Hence multiplication is not associative. This completes the proof of Theorem 3.

We note, finally, that the existence of planes of class III 1 now follows from the existence of ordered skew-fields which are not fields.

References

[1] A. Barlotti, Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta (A, a) per cui un piano grafico risulta $A - a$ transitivo. Boll. Un. Mat. Ital. **12**, 212—226 (1957).

[2] H. Lenz, Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **57**, 20—31 (1954).

[3] F. R. Moulton, A simple non-desarguesian plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 192—195 (1902).

[4] G. Pickert, Projektive Ebenen. Berlin 1955.

[5] J. C. D. Spencer, On the Lenz-Barlotti classification of projective planes. Quart. J. Math. Oxford, **11**, 241—257 (1960).

Eingegangen am 10. 8. 1960

Anschrift des Autors:
Jill C. D. S. Yaqub
Department of Mathematics
University of Washington
St. Louis 30 (Mo.), USA

Planar Half-Loops

By

T. G. Ostrom

The relation between Desarguesian affine planes and vector spaces of dimension two is well known. Basing his work on André's study of translation (or Veblen-Wedderburn) planes [1], the author has investigated the relation between vector spaces and translation planes which are not necessarily Desarguesian [5].

By use of the "parallelogram law" for the sum of two non-collinear vectors, one can introduce a binary operation on the points of an arbitrary affine plane. (See [3] for a related approach.) We thus obtain the system that we call a planar half-loop. In this paper we examine some aspects of the algebraic structure of a planar half-loop, including subsystems, restricted cases of the associative law, and geometrical interpretations.

Definition. *Given a set L, a special class of subsets of L called O-lines, and a binary operation "$+$", then $L(+)$ will be called a planar half loop if*

(1) *There is a special element "O" of L such that O belongs to every O-line.*

(2) *Every O-line contains at least one element of L besides O and there are at least two distinct O-lines.*

(3) *Each element of L other than O belongs to exactly one O-line.*

(4) *If P and Q belong to different O-lines, then there exists a unique element R of L such that $P + Q = Q + P = R$. If P and Q belong to the same O-line, then $P + Q$ need not be defined, except that $P + O = O + P = P$.*

(5) *If P and R belong to different O-lines, there exists a unique element Q in L such that $P + Q = R$.*

(6) *Let OP denote an O-line containing P. Let $OP + Q$ denote the set of points $P_i + Q$, where $P_i \in OP$, $Q \notin OP$, and Q is fixed. Then $OP + Q$ will be called a proper coset of OP; OP will be considered to be an improper coset of itself. If $R \in OP + Q$, then*

$$OP + R = OP + Q.$$

(7) *If OP and OQ are any two distinct O-lines and if $R \notin OP, OQ$, then there exists a unique P_i in OP and a unique Q_i in OQ such that $P_i + Q_i = R$.*

(8) *If $P_i \in OP$, then P_i does not belong to any proper coset of OP.*

Theorem 1. *A planar half-loop L is equivalent to an affine plane π in which*

(1) *The points of π are the elements of L and*

(2) *The lines of π are the cosets of the O-lines in L.*

Proof. Given an affine plane π let P and Q be any two points not collinear with some given reference point O. Let l_1 be the line through P parallel to OQ and let l_2 be the line through Q parallel to OP. Let R be the intersection of l_1 with l_2. The reader may readily verify that if we set $P + Q = R$, then postulates 1–8 are satisfied.

Conversely, suppose that we are given a planar half-loop L with "lines" defined as in the Theorem. To show that every two points lie on at least one line, we need only consider the case where we have two points P and R not on the same O-line. Then $\exists\, Q$ such that $P + Q = R$. It follows from postulate 6 that both P and R belong to $OQ + R$.

It follows from postulates 6 and 8 that the cosets of a given O-line will form a parallel class. We shall now show that lines in different parallel classes have at least one point in common.

Case I. Two O-lines. Every two O-lines intersect at O.

Case II. An O-line and a coset of another O-line. Consider OP and $OQ + R$, where OP and OQ are different O-lines. By postulate 7, either R belongs to OP or there exists P_i in OP, Q_i in OQ such that $P_i + Q_i = R$. It follows from postulate 6 that $OQ + P_i = OQ + R$. But P_i belongs to $OQ + P_i$ hence OP and $OQ + R$ intersect at P_i.

Case III. Cosets of different O-lines. Consider $OP + Q$ and $OR + S$, where OP and OR are different O-lines. Applying Case II, let R_i be the intersection of $OP + Q$ with OR and let P_i be the intersection of OP with $OR + S$. Since R_i belongs to OR and P_i belongs to OP, $R_i + P_i = T$ is defined. Then T belongs to $OP + R_i = OP + Q$ and also to $OR + P_i = OR + S$.

We have established that every two lines not in the same parallel class have at least one point in common. We have left to show that two distinct lines cannot have two points in common. By postulates 3 and 8 we need only to look at Cases II and III above.

Case II. Suppose that both P_1 and P_2 belong to the intersection of OP with $OQ + R$. Then P_2 belongs to $OQ + R = OQ + P_1$. Hence there exists Q' in OQ such that $P_2 = Q' + P_1$. It follows that P_2 belongs to $OP + Q'$, contrary to postulate 8.

Case III. Suppose that both T_1 and T_2 belong to the intersection of $OP + Q$ with $OR + S$. Let R_i and P_i be defined as before. Then there exists P' in OP such that $R_i + P' = T_1$ and there exists R' in OR such that $R' + P_i = T_1$. By postulate 7, $P' = P_i$ and $R' = R_i$ so that $T_1 = R_i + P_i$. But, similarly, $T_2 = R_i + P_i$. It follows that $T_1 = T_2$. This proves the Theorem.

Definition. *A planar half-loop which is a loop will be called a planar loop.*

Note that the O-lines of a planar loop are necessarily subloops. If we have given a planar half-loop L in which addition is not defined on the O-lines, then the operation of addition can readily be extended so as to form a loop. This extension is not unique; indeed, a planar loop need not be abelian.

Definition. *P will be said to be an associator in L if $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ for all choices of Q and R such that both sides of the above equation are defined. Q will be*

said to be a middle associator in L if $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ for all choices of P and R such that both sides of the equation are defined.

Note that every associator is a middle associator if L is abelian. This will be the case if $P + Q$ is not defined when P and Q are on the same O-line.

Definition. *The mapping σ_P which carries each point X into $X + P$ will be called a pseudo-translation.*

Theorem 2. *The pseudo-translation σ_P has the following properties:* (1) *$Q\sigma_P$ is not necessarily defined if Q belongs to OP. If Q does not belong to OP, then Q has a unique image and a unique pre-image not on OP.* (2) *If $Q\sigma_P$ is defined, then Q and $Q\sigma_P$ are in the same coset of OP.* (3) *If $OR \neq OP$, Q is a middle associator, S belongs to $OR + Q$ and $S\sigma_P$ is defined, then $S\sigma_P$ is on the line $OR + (Q + P)$.*

Proof. Properties (1) and (2) follow directly from postulates 4,5 and 6. If S belongs to $OR + Q$, then $S = R + Q$ for some R in OR. If Q is a middle associator, $S + P = R + (Q + P)$, which establishes property (3).

Theorem 3. *If either* (1) *P is an associator or* (2) *Every line in π which is not parallel to OP contains a middle associator Q such that $Q\sigma_P$ is defined, then σ_P induces a translation on π.*

Proof. The Theorem is known to be true for Desarguesian planes, including the (Desarguesian) case where each line of π contains exactly two points. It is also well known that all lines of an affine plane contain the same number of points. Hence we shall assume that every line of π contains at least three points.

Let us except, for the moment, all points P_i such that $P_i \neq O$ and P_i belongs to OP. With this exception, the set of images of points on any line $OR + Q$ will lie on the parallel line $OR + (Q + P)$ in either case (1) or (2). Thus we can speak unambiguously of the image $l\sigma_P$ of any line l.

Suppose that P_i belongs to OP and that l_1 and l_2 are any two lines different from OP which go through P_i. Let $l_1\sigma_P$ and $l_2\sigma_P$ intersect at U_i. If U_i does not belong to OP, then $U_i\sigma_p^{-1}$ is defined and $U_i\sigma_p^{-1}$ must equal P_i, the intersection of l_1 and l_2. This contradicts Theorem 2; we conclude that U_i belongs to OP. Moreover, it follows that, for every line l through P_i, $l\sigma_P$ goes through U_i.

Define a new mapping σ^* such that $Q\sigma^* = Q\sigma_P$ if Q is not on OP, $P_i\sigma_l^* = U_i$ if P_i belongs to OP. Then σ^* is a translation on π.

Corollary. *The following three propositions are equivalent:* (1) *L is associative.* (2) *For each O-line OP and each line l not parallel to OP, l contains a middle associator not on OP.* (3) *π is a translation plane.*

Proof. In view of the previous Theorem, we need only prove that (3) implies the other two. It is well known that every translation plane can be coordinatised by a VEBLEN-WEDDERBURN system (quasifield) [1]. If this be done with O as the origin, simple calculation establishes that the x coordinate of $(c, cm) + (d, d\nu)$ must satisfy the equation $xm - x\nu = (c + d)m - (c + d)\nu$. (Here we are using the same symbol "+" for addition in the coordinate system as for addition in L.) It readily follows

that $(c, cm) + (d, dv) = (c + d, cm + dv)$ and in general that addition of points corresponds to addition of coordinates in the VEBLEN-WEDDERBURN system. The Corollary then follows from the fact that coordinate addition is associative.

Definition. *A subset H of L will be said to be a closed subsystem if* (1) *H contains at least two points P and Q such that P and Q are on different O-lines.* (2) *If P and Q belong to H and $P + Q$ is defined, then $P + Q$ belongs to H.* (3) *If P and Q belong to H and $P + X = Q$, then X belongs to H. In particular, O belongs to H.*

Definiton. *Given a closed subsystem H. Let $\mathfrak{S}(H)$ denote the set of all points and lines of π such that* (1) *A point P belongs to $\mathfrak{S}(H)$ if P belongs to H.* (2) *A line l belongs to $\mathfrak{S}(H)$ if l contains at least two points of H. Then $\mathfrak{S}(H)$ will be called a linear system. For brevity, we will sometimes write $\mathfrak{S}$ instead of $\mathfrak{S}(H)$. If l belongs to $\mathfrak{S}$, let $\mathfrak{S}(l)$ denote the set of points common to l and H. If OP is an O-line belonging to $\mathfrak{S}$ and Q belongs to $\mathfrak{S}$, let $\mathfrak{S}(OP + Q)$ denote the set of points $P_i + Q$, where P_i belongs to $\mathfrak{S}(OP)$. $\mathfrak{S}(OP + Q)$ will be referred to as a coset of $\mathfrak{S}(OP)$ in H.*

Theorem 4. *Let H be a closed subsystem. Then* (1) *H satisfies the postulates for a planar half-loop with the exception of postulate 7, where the O-lines of H are the sets $\mathfrak{S}(OP)$, OP belongs to $\mathfrak{S}$.* (2) *For each line m in $\mathfrak{S}(H)$, there is some O-line l belonging to $\mathfrak{S}$ such that $\mathfrak{S}(m)$ is a coset in H of $\mathfrak{S}(l)$ and l is parallel to m.* (3) *If m is a line of π which is not an O-line, if m contains a point of $\mathfrak{S}$ and is parallel to an O-line belonging to $\mathfrak{S}$, then m belongs to $\mathfrak{S}$.* (4) *If l is an O-line belonging to $\mathfrak{S}$ such that $\mathfrak{S}(l)$ contains exactly k points, and m is a line belonging to $\mathfrak{S}$ which is parallel to l, then $\mathfrak{S}(m)$ contains exactly k points.* (5) *If π is finite, with n lines in each parallel class and H contains n points, then every line of π is either parallel to some line of $\mathfrak{S}$ or contains a point of $\mathfrak{S}$.*

Proof. (1) follows fairly immediately from the definition of H and the properties of L.

(2) Suppose that A and B belong to $\mathfrak{S}$ and lie on the line m parallel to OP. Then $m = OP + B$. Hence, there exists X in OP such that $X + B = A$. Now X must belong to $\mathfrak{S}$. Thus every point A in $\mathfrak{S}(m)$ is in $\mathfrak{S}(OP + B)$. Furthermore, for every X in $\mathfrak{S}(OP)$, $X + B$ is in $\mathfrak{S}(m)$. Therefore, $\mathfrak{S}(m) = \mathfrak{S}(OP + B)$.

(3) Suppose that B is a point on the line m which is parallel to OP, where OP belongs to $\mathfrak{S}$. Then every point in $\mathfrak{S}(OP + B)$ is on m. Thus m will contain at least two points of $\mathfrak{S}$, so m belongs to $\mathfrak{S}$.

(4) If l is an O-line in $\mathfrak{S}$ and m is a line belonging to $\mathfrak{S}$ parallel to l, we have already established a one-to-one correspondence between $\mathfrak{S}(l)$ and $\mathfrak{S}(m)$.

(5) Suppose that $\mathfrak{S}$ contains the n points $O = P_1, P_2, \ldots, P_n$ and that OR does not belong to $\mathfrak{S}$. Then the n cosets $OR + P_i$ are distinct and each contains a point of $\mathfrak{S}$. That is, each of the lines parallel to OR contains a point of S.

Thus, the incidence system $\mathfrak{S}$ is a sort of generalized affine space. If π' is an affine subplane of π which contains O, then the points of π' will form a closed subsystem H which is a planar half-loop and $\mathfrak{S}(H) = \pi'$. In [5] examples of closed subsystems are given in which $\mathfrak{S}(H)$ is an affine space of dimension greater than two.

By analogy with the earlier definitions, we can now speak of associators and middle associators in H; we can also talk about translations on $\mathfrak{S}(H)$.

Theorem 5. *Let H be a finite closed subsystem of the planar half-loop L. Let P be an element of H such that either* (1) *P is an associator in H or* (2) *Every line in $\mathfrak{S}(H)$ which is not parallel to OP contains a point Q not on OP which is a middle associator in H. Then the pseudotranslation σ_P on π induces a translation on $\mathfrak{S}(H)$.*

Proof. The proof is analogous to the proof of Theorem 3. Excluding the points on OP, the image of every point in $\mathfrak{S}$ is a point in $\mathfrak{S}$ and for each line l belonging to $\mathfrak{S}$, there is a line $l\sigma_P$ belonging to $\mathfrak{S}$ such that the image of the set $\mathfrak{S}(l)$ is the set $\mathfrak{S}(l\sigma_P)$. Moreover, $l\sigma_P$ is parallel to l.

Let l be a line of $\mathfrak{S}$ intersecting OP at the point P_1 belonging to $\mathfrak{S}$. If H is finite, then l and $l\sigma_P$ both contain the same number k of points in $\mathfrak{S}$. Now σ_P establishes a one to one correspondence between the points of $\mathfrak{S}(l)$ and $\mathfrak{S}(l\sigma_P)$ which are not on OP. That is, $\mathfrak{S}(l\sigma_P)$ contains $k-1$ points not on OP. We conclude that the intersection U of $l\sigma_P$ with OP is a point of $\mathfrak{S}$.

As in Theorem 3, we can now establish that for every line l belonging to $\mathfrak{S}$ which intersects OP at P_1, there is a line $l\sigma_P$ in $\mathfrak{S}$ such that $\mathfrak{S}(l\sigma_P)$ includes U. The rest of Theorem 5 goes through as in Theorem 3.

Theorem 6. *Let H be a finite associative closed subsystem in which addition is not defined on the O-lines. Then* (1) *Addition on H can be extended so that H becomes a commutative group in which every element has the same order p and* (2) *If P and Q are two points of H which are on different O-lines, P and Q generate a subgroup H' such that $\mathfrak{S}(H')$ is a Desarguesian subplane of π.*

Proof. The extension to a group follows as in Theorems 3 and 5. Moreover, the commutative property of L does require that the group be commutative.

Each point P will generate a subgroup consisting of points on OP. Denote by kP the result of adding P to itself k times. Suppose that P and Q are points of $\mathfrak{S}(H)$ lying on different O-lines and that $kP=0$, $kQ \neq 0$. Then the point $k(P+Q) = kP + kQ = kQ$ is on OQ and also on $O(P+Q)$, which is a contradiction. It follows that all elements of H must have the same order, which must necessarily be a prime p.

If P and Q are on different O-lines, they generate a subgroup H' of order p^2. The points Q, P, $P+Q$, $P+2Q$, $P+3Q$, ... lie on different O-lines and generate the subgroups of H' which are of order p. It readily follows that $\mathfrak{S}(H')$ is isomorphic to the Desarguesian plane over $GF(p)$.

The following examples of associative closed subsystems may be worthy of note:

(1) Affine subplanes which contain O, if they are translation planes.

(2) Cases where $\mathfrak{S}(H)$ satisfies the incidence relations for an affine space of dimension greater than two.

(3) The set of points P such that σ_P induces a translation on π, provided that these points are not all on the same O-line.

(4) The middle associators in L, if L is a planar loop and the middle associators are not all on the same O-line.

(5) See Theorem 7 below.

Theorem 7. *If addition is not defined on the O-lines and the associators do not all lie on the same O-line, then the associators form a closed subsystem.*

Proof. If Q is an associator, σ_Q induces a translation on π and addition can be extended so that $X + Q$ is defined for all X. If Q_1 and Q_2 are two associators on the same O-line and P is not on OQ, then

$$P + (Q_1 + Q_2) = (P + Q_1) + Q_2 = Q_2 + (Q_1 + P) = (Q_2 + Q_1) + P.$$

Thus $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.

Using this extended addition, suppose that Q_1 and Q_2 are two associators such that $(Q_1 + Q_2) + (P + R)$ and $[(Q_1 + Q_2) + P] + R$ are defined. Then $[Q_1 + (Q_2 + P)] + R$ is also defined. If $(Q_2 + P) + R$ is also defined, we may write

$$(Q_1 + Q_2) + (P + R) = Q_1 + [Q_2 + (P + R)] = Q_1 + [(Q_2 + P) + R] =$$
$$= [Q_1 + (Q_2 + P)] + R = [(Q_1 + Q_2) + P] + R.$$

Subject to the possible exceptional case $Q_2 + P$ is on OR, we have established that $Q_1 + Q_2$ associates with P and R. If $(Q_1 + P) + R$ is defined, we can reverse the roles of Q_1 and Q_2. We are reduced to the case where $Q_1 + P$ and $Q_2 + P$ are both on OR. If this is so, but Q_1 is not on OR, then $Q_1 + R$ is not on OR, so that $(Q_1 + R) + (Q_2 + P)$ is defined. Then

$$Q_1 + [(Q_2 + P) + R] = (Q_1 + R) + (Q_2 + P) = [Q_1 + (Q_2 + P)] + R$$

and the associativity of $Q_1 + Q_2$ is again established.

Finally, suppose that $Q_1 + P$, $Q_2 + P$, and Q_1 are all on OR. Then P is on OR and $R + P$ is not defined (contrary to hypotheses) unless either R or P is an associator. If either R or P is an associator, it follows directly that $(Q_1 + Q_2) + (P + R) = [(Q_1 + Q_2) + P] + R$. Thus, in any case, the sum of two associators is an associator.

If Q is an associator, the (extended) mapping σ_Q^{-1} is a translation carrying O into some point $-Q$ and $\sigma_Q^{-1} = \sigma_{-Q}$. Let $P = Q + S$. Then

$$-Q + (P + R) = -Q + [(Q + S) + R] = -Q + [Q + (S + R)] = S + R =$$
$$= (P - Q) + R,$$

provided $P + R$ and $(P - Q) + R$ are defined. Hence $-Q$ is an associator. The Theorem follows.

Remark. If π is of order n and there are more than n associators, at least one of the n lines in each parallel class must contain two associators. Hence every O-line will contain at least one associator besides O. (See Theorem 4.)

Theorem 8. *If every point on some O-line is a middle associator, then L is associative.*

Proof. If every point on OQ is a middle associator and P does not belong to OQ, then σ_P induces a translation on π by Theorem 3.

If Q_i is any point on OQ, let $Q_i = P + R$. The product of two translations is a translation. Hence $\sigma_P \sigma_R$ is a translation which carries O into Q_i. Since O can be carried into any point in π by a translation, π is a translation plane and L is associative.

Suppose that L is homomorphic to the loop L', — i.e., there is a mapping Θ from L onto L' such that, whenever $P + Q$ is defined, $P\Theta + Q\Theta = (P + Q)\Theta$ in L'. Let K be the kernel of Θ — i.e., the set of elements P in L such that $P\Theta$ is the identity of L'. If K contains points on more than one O-line, K will be a closed subsystem of L.

One interesting homomorphism may arise as follows: Suppose that addition of cosets of the O-line OP is well defined in the sense that whenever $Q + R$ and $U + V$ are defined, then, "U belongs to $OP + Q$ and V belongs to $OP + R$", implies that $U + V$ belongs to $OP + (Q + R)$. In this situation, the cosets of OP form a loop L'; L is homomorphic to L' and OP is the kernel of the homomorphism. Furthermore, every line of π which is not parallel to OP contains exactly one representative of each coset.

Again, suppose that H is a closed subsystem of L and that the operation of addition can be extended in such a way that

(1) $P + Q$ is defined whenever P belongs to H and Q does not belong to H.

(2) If Q does not belong to H and P_1, P_2 belong to H, there exists P_3 in H such that $P_1 + (P_2 + Q) = P_3 + Q$.

(3) If Q_1, Q_2 are not in H, P_1, P_2 are in H and $Q_1 + Q_2$ is defined, then there exists P_3 in H such that

$$(Q_1 + P_1) + (Q_2 + P_2) = (Q_1 + Q_2) + P_3 .$$

In this case, the cosets of H will form a loop L' which is a homomorphic image of L and H will be the kernel of the homomorphism.

Postulates 6 und 7 suggest the possibility of representing L as a "direct sum" of two loops, especially in the case where the elements of each of these loops can be identified with the cosets of some O-line. Since the direct sum of two loops is a loop, we might just as well restrict ourselves to planar loops.

Theorem 9. *Let L be a planar loop which is the direct sum of two loops L_1 and L_2. Let Θ_1 and Θ_2 be the homomorphisms from L onto L_1 and L_2. Suppose that there is an O-line OQ such that the sets $(OQ)\Theta_j$ and $(OQ + R)\,\Theta_j$ each contain exactly one element of L_j, $j = 1,2$. Then L is associative.*

Proof. If $P\Theta_1 = Q_i\Theta_1$ and $P\Theta_2 = Q_j\Theta_2$ we can represent P by the pair (Q_i, Q_j), where Q_i, Q_j belong to OQ. In particular, Q_i will be represented by (Q_i, Q_i). Note that both L_1 and L_2 must be isomorphic to the subloop OQ so that L is isomorphic to the direct sum of OQ with itself.

Now the line $OQ + R$ contains some point $(O, Q_j) = S$. Thus $OQ + R$ consists of the points $Q_k + S = (Q_k, Q_k) + (O, Q_j) = (Q_k, Q_k + Q_j)$, where Q_j is fixed and Q_k runs through all of the points on OQ.

By postulate 6, the point $(Q_h, Q_h) + (Q_k, Q_k + Q_j) = (Q_h + Q_k, Q_h + (Q_k + Q_j))$ must also be on $OQ + R$. Likewise,

$$(Q_h + Q_k, Q_h + Q_k) + (O, Q_j) = (Q_h + Q_k, (Q_h + Q_k) + Q_j)$$

must be on $OQ + R$. Since $OQ + R$ contains only one point with first "coordinate" $Q_h + Q_k$, we conclude that $Q_h + (Q_k + Q_j) = (Q_h + Q_k) + Q_j$. Hence OQ and L are groups.

Corollary. *If addition of cosets is well defined for two distinct O-lines, then L is associative.*

Finally, it should be noted that if addition is not defined on the O-lines, automorphisms of L are precisely equivalent to collineations of π which fix the origin. However, if addition is definied on the O-lines, a collineation of π does not necessarily induce an automorphism of L and an automorphism of L will be a collineation of π only in the case where the image of each O-line is an O-line [1].

Examples of planar half loops are readily furnished by the known affine planes. Except for the cases where L is associative, the author knows of no cases where L contains middle associators other than O. There are no known finite affine planes other than the translation planes which admit translations in more than one "direction". Our results raise the question as to whether or not such systems exist; they also rule out some of the methods by which one might attempt to construct such systems.

References

[1] J. André, Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156–186 (1954).
[2] R. H. Bruck, Loops with transitive automorphism groups. Pac. J. Math. **1**, 481–483 (1951).
[3] R. H. Bruck, Recent advances in the foundations of Euclidean plane geometry. Amer. Math. Monthly **62** (II), 2–17 (1955).
[4] R. H. Bruck, A survey of binary systems. Berlin, Springer Verlag 1958.
[5] T. G. Ostrom, Translation planes and configurations in Desarguesian planes. Arch. Math. **11**, 457–464 (1960).

Eingegangen am 6. 2. 1961

Anschrift des Autors:
T. G. Ostrom
Departments of Mathematics
Washington State University
Pullman (Wash.), USA

Bemerkungen zu einer Axiomatisierung der Euklidischen Planimetrie

Von

Paul de Witte

Professor Bernays [1] gab für die euklidische Planimetrie ein Axiomensystem mit einer einzigen Grundbeziehung $Rabc$ an: ,,das Punktetripel a, b, c, bildet bei b einen rechten Winkel''. Die fünf ersten Axiome (Theorie der Kollinearität) lauten wie folgt:

A1: $\neg\, Raba$;

A2a: $Rabc \to Rcba$;

A2b: $Rabc \to \neg\, Racb$;

A3: $Rabc \;\&\; Rabd \;\&\; Rebc \to Rebd$;

A4: $Rabc \;\&\; Rabd \;\&\; c \neq d \;\&\; Recb \to Recd$;

A5: $a \neq b \to (\mathrm{Ex})\, Rabx$.

(I) Es ist möglich, A3 aus A2, 4, 5 abzuleiten. (II) Hingegen ist, wie auch Professor Bernays[1]) bemerkte, A4 unabhängig von A1, 2, 3, 5.

Zu (I). A2b ergibt

$$Rabb \to \neg\, Rabb.$$

Also:

$$\neg\, Rabb.$$

Somit bringt die Voraussetzung in A3 mit sich, daß $b \neq c$ und $b \neq d$. Weiter kann man annehmen, daß $c \neq d$, denn sonst wäre der Satz schon bewiesen.

Wegen A5 gibt es ein x derart, daß $Rbcx$ gilt und ferner — wegen A2a — $Rxcb$. Die Anwendung von A4 auf

$$Rabc \;\&\; Rabd \;\&\; c \neq d \;\&\; Rxcb$$

ergibt $Rxcd$. Endlich ergibt die Anwendung von A4 auf

$$Rxcb \;\&\; Rxcd \;\&\; b \neq d \;\&\; Rebc$$

die Behauptung $Rebd$.

Zu (II). Interpretiert man $Rabc$ als: ,,b liegt zwischen a und c'', dann gelten A1, 2, 3, 5, jedoch nicht A4.

Mein aufrichtiger Dank gilt Herrn Professor Bernays und Herrn Professor Hirsch für ihre freundlichen Ratschläge. Herrn Paul Fettweis danke ich für seine Hilfe bei der Übersetzung.

---

[1] Briefliche Mitteilung.

Literaturverzeichnis

[1] The Axiomatic Method with special reference to geometry and physics. Proceedings of an International Symposium held at the University of California, Berkeley, December 26, 1957 — January 4, 1958. Edited by L. Henkin, P. Suppes and A. Tarski, 1959, North-Holland Publishing Company, Amsterdam: S. 8ff.

Eingegangen am 23. 2. 1961

Anschrift des Autors:
Paul de Witte
Vrije Universiteit Brussel
Navorsingsstagiair bij het Nationaal
Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek